安康市2023届高三年级第二次质量联考试卷

理科数学

试卷满分:150分　　考试时间:120分钟

注意事项:

1.答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。

2.全部答案在答题卡上完成，答在本试卷上无效。

3.回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案用0.5mm黑色笔迹签字笔写在答题卡上。

4.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知$(2+\mathrm{i})^2 = z\cdot(4-3\mathrm{i})$，则$z\cdot\bar{z}=$　　(　　)

A. i　　B. $-\mathrm{i}$　　C. 1　　D. -1

2.若集合$A=\{x|y=\log_3(2-x)\}$，$B=\{y|y=(x-1)^2+1\}$，则$A\cap B=$　　(　　)

A. $(1,\ 2)$　　B. $[1,\ 2)$　　C. $[1,\ +\infty)$　　D. $(-\infty,\ 2)$

3.在矩形$ABCD$中，M是CD的中点，若$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{AB}$，则$\lambda+\mu=$　　(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

4.已知x，y满足约束条件$\begin{cases}2x+y-3\leqslant 0\\3x-y+2\geqslant 0\\x+2y-2\geqslant 0\end{cases}$，则$z=2x-y$的最大值为　　(　　)

A. $-\frac{11}{5}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. 2　　D. $\frac{7}{3}$

5.已知函数$f(x)=\sin\omega x\cos\omega x-\sqrt{3}\sin^2\omega x(\omega>0)$的最小正周期为$\pi$，则下列说法不正确的是　　(　　)

A. $\omega=1$

B. $f(x)$的单调递增区间为$\left[-\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ \frac{\pi}{12}+2k\pi\right]$，$(k\in Z)$

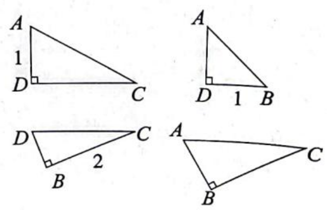
C.将$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度后所得图象关于y轴对称

D. $f\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=-\sqrt{3}$

6. 已知四面体的四个面均为直角三角形（如图所示），则该四面体中异面直线AB与CD所成角的余弦值为　　(　　)

A. $-\frac{\sqrt{10}}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$



7. $a=\log_6 3$，$b=\log_{12}4$，$c=5^{-\frac{1}{2}}$，$d=\frac{5}{8}$，则a，b，c，d的大小关系为　（　　）

A. $c<b<a<d$　　B. $b<c<d<a$　　C. $c<a<b<d$　　D. $c<b<d<a$

8. 下列命题正确的是　（　　）

A. “$\exists x\in R$，$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1)>0$”的否定为假命题

B. 若“$\forall x\in R$，$ax^2+4x+1>0$”为真命题，则$a\leqslant 4$

C. 若$a>0$，$b>0$，且$a+3b+ab=9$，则$a+3b\geqslant 6$

D. $a+b=0$的必要不充分条件是$\frac{a}{b}=-1$

9. 设抛物线C：$x^2=2py(p>0)$的焦点是F，直线l与抛物线C相交于A，B两点，且$\angle AFB=\frac{3\pi}{4}$，过弦$AB$的中点$P$作$y=-\frac{p}{2}$的垂线，垂足为$Q$，则$\left(\frac{|AB|}{|PQ|}\right)^2$的最小值为　（　　）

A. $2+\sqrt{2}$　　B. 3　　C. $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$　　D. $2-\sqrt{2}$

10. 宋代理学家周敦颐的《太极图》和《太极图说》是象数和义理结合的表达.《朱子语类》卷七五：“太极只是一个混沦底道理，里面包含阴阳、刚柔、奇偶，无所不有”.太极图（如下图）将平衡美、对称美体现的淋漓尽致.定义：对于函数$f(x)$，若存在圆C，使得$f(x)$的图像能将圆C的周长和面积同时平分，则称$f(x)$是圆C的太极函数.下列说法正确的是　（　　）

① 对于任意一个圆，其太极函数有无数个

②$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2^x+1)+\frac{1}{2}x$是$x^2+(y+1)^2=1$的太极函数

③太极函数的图像必是中心对称图形

④存在一个圆C，$f(x)=\sin x+\cos x$是它的太极函数

A. ①④　　B. ③④　　C. ①③　　D. ②③

11. 已知$\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2023}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2023}x^{2023}$，则$a_2+\frac{3}{2^2}a_3+\frac{4}{2^3}a_4+\cdots+\frac{2023}{2^{2022}}a_{2023}$的值为　（　　）

A. 0　　B. 2^{2023}　　C. $\frac{2023}{2^{2022}}$　　D. $-\frac{2023}{2^{2022}}$

12. 已知$\ln x-e^x\leqslant\lambda x-\ln(1-\lambda)$在$(0,+\infty)$恒成立，则$\lambda$的取值范围是　（　　）

A. $[1-e,+\infty)$　　B. $[1-e,1)$　　C. $[e-2,1)$　　D. $[0,1)$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 某服装公司对1-5月份的服装销量进行了统计，结果如下：

月份编号x	1	2	3	4	5
销量y(万件)	50	a	142	185	227

若y与x线性相关，其线性回归方程为$\hat{y}=45x+5$，则$a=$_______.

14. 已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上有不同的三点$A$，$B$，$P$，且$A$，$B$关于原点对称，直线$PA$，$PB$的斜率分别为$k_{PA}$，$k_{PB}$，且$k_{PA}\cdot k_{PB}\in\left(\frac{1}{4},1\right)$，则离心率$e$的取值范围是________.

15. ΔABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，且满足$c=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$a=2$，$a\cos C=b-\frac{1}{2}$，则ΔABC的面积为________.

16. 已知定义在$(0, +\infty)$上的函数$f(x)=\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{a}{2}x^2+e^2x+1$恒有两个不同的极值点，则$a$的取值范围是________.

三、解答题：共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答．第22、23题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共60分．

17.（12分）已知公比大于1的等比数列$\{a_n\}$满足$a_3+a_5=40$，$a_4=16$，$b_n=\log_2 a_n$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记$c_n=a_n\cdot b_n$，求$\{c_n\}$的前n项和S_n.

18.（12分）2023年的春节联欢晚会以“欣欣向荣的新时代中国，日新月异的更美好生活”为主题，通过各种艺术形式，充分展现开心信心、顽强奋进的主旋律.调查表明，观众对春晚的满意度与节目内容、灯光舞美、明星阵容有极强的相关性.现将这三项的满意度指标分别记为a，b，c，并对它们进行量化：0表示不满意，1表示基本满意，2表示非常满意.再用综合指标$y=a+b+c$的值评定观众对春晚的满意程度：若$y\geqslant 4$，则表示非常满意；$2\leqslant y\leqslant 3$表示基本满意；$0\leqslant y\leqslant 1$表示不太满意.为了了解某地区观众对今年春晚的满意度，现从此地观众中随机电话连线10人进行调查，结果如下：

人员编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
满意度指标	(1,1,2)	(2,1,1)	(2,2,2)	(1,0,1)	(1,2,1)	(2,2,1)	(1,1,1)	(2,1,2)	(0,1,0)	(1,0,2)

(1) 在这10名被电话调查的人中任选2人，求这2人对灯光舞美的满意度指标不同的概率；

(2) 从满意程度为“非常满意”的被调查者中任选一人，其综合指标为m，从满意程度不是“非常满意”的被调查者中任选一人，其综合指标为n，记随机变量$X=m-n$，求X的分布列及数学期望.

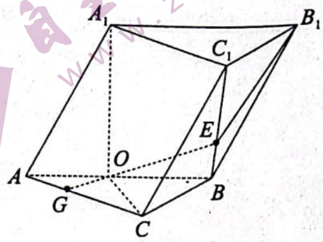
密　封　线

密 封 线

19.（12分）如图，在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，O为AB中点，$A_1O\perp$ 底面 ABC，$A_1O=4$，$AC=BC$，$AB=2OC=6$，G，E 分别在线段 AC，BC_1 上，且 $\frac{AG}{GC}=\frac{BE}{C_1E}=\frac{1}{2}$.

（1）求证：GE // 面 AA_1B_1B；

（2）记面 $B_1GE\cap$ 面 $ABC=l$，求二面角 B_1-l-B 的余弦值.



20.（12分）设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$B(0,1)$，$P$为直线$l_1$：$y=kx(k>0)$上不同于原点$O$的任意一点，线段$OP$的垂直平分线为$l_2$，椭圆的两焦点$F_1$，$F_2$关于$l_2$的对称点都在以$P$为圆心，$\sqrt{3}$为半径的圆上

（1）求椭圆C的方程；

（2）若直线l_1与椭圆交于M，N两点，A为椭圆的右顶点，求四边形$AMBN$的面积的取值范围.

21.（12分）已知函数$f(x)=a\ln x$，$g(x)=be^x$.（e为自然对数的底数）

（1）当$a=e$时，恰好存在一条过原点的直线与$f(x)$，$g(x)$都相切，求b的值；

（2）若$b=1$，方程$xg(x)-f(x)-ax=0$有两个根x_1，x_2，$(0<x_1<x_2)$，求证：$x_1\cdot x_2>e^{2-(x_1+x_2)}$.

（二）选考题，共10分．请考生在第22、23题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

22.［选修4-4：坐标系与参数方程］（10分）

在直角坐标系xOy中，直线l的参数方程为$\begin{cases} x=4-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=4+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$为参数）．以坐标原点O为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C$的极坐标方程为$\rho=8\sin\theta$，$A$为曲线$C$上一点.

（1）求A到直线l距离的最大值；

（2）若点B为直线l与曲线C在第一象限的交点，且$\angle AOB=\dfrac{7\pi}{12}$，求$\Delta AOB$的面积.

23. [选修4-5：不等式选讲]（10分）

已知$f(x)=|x-a|+|x+3a-2|$，$g(x)=-x^2+2ax+1$，$a\in R$.

（1）当$a=2$时，解关于x的不等式$f(x)\geq 7$；

（2）若对$\forall x_1$，$x_2\in R$，都有$f(x_1)>g(x_2)$成立，求a的取值范围.

密 封 线

安康市2023届高三年级第二次质量联考试卷

理科数学参考答案

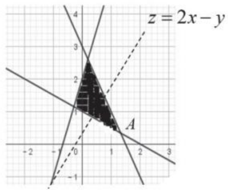
1. C　解析：$z=\frac{(2+\mathbf{i})^2}{4-3\mathbf{i}}=\frac{3+4\mathbf{i}}{4-3\mathbf{i}}=\frac{(3+4\mathbf{i})(4+3\mathbf{i})}{25}=\mathbf{i}$，$\therefore z\cdot\overline{z}=\mathbf{i}\times(-\mathbf{i})=1$，故选C.

2. B　解析：$A=\{x|x<2\}$，$B=\{y|y\geqslant 1\}$，$\therefore A\cap B=\{x|1\leqslant x<2\}$，故选B.

3. C　解析：$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\therefore \lambda=1$，$\mu=\frac{1}{2}$，$\therefore \lambda+\mu=\frac{3}{2}$，故选C.

4. D　解析：画出可行域

平移目标函数直线，可知当直线过点$A\left(\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)$时，$z$有最大值$\frac{7}{3}$，故选D.



5. B　解析：$f(x)=\frac{1}{2}\sin 2\omega x-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2\omega x)=\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$

对于A：因为$T=\pi$，$\therefore \omega=1$，故A正确；

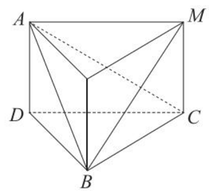
对于B：$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$，令$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，解得$-\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k\pi$，$k\in Z$，所以单调递增区间为$\left[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\ \frac{\pi}{12}+k\pi\right]$，$k\in Z$，故B错误；

对于C：将$f(x)$图像向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位得到$\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}$，关于$y$轴对称，故C正确；

对于D：$\because f(x)$关于$\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $k\in Z$对称，当$k=1$时，对称中心为$\left(\frac{\pi}{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以D正确；

故选B.

6. C　解析：四面体中$AD\perp$面BCD，将四面体补成直三棱柱（如图）



$\because CD//AM$，$\therefore \angle MAB$为所求.ΔMAB中，$AB=\sqrt{2}$，$BM=\sqrt{5}$，$AM=\sqrt{5}$，

$\therefore \cos\angle MAB=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，故选C.

7. A　解析：$c=5^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{a}=\log_3 6=1+\log_3 2$，$\frac{1}{b}=\log_4 12=1+\log_4 3$，$\because \frac{\log_4 3}{\log_3 2}=\frac{\lg 3}{\lg 4}\cdot\frac{\lg 3}{\lg 2}>\frac{\lg^2 3}{\left(\frac{\lg 4+\lg 2}{2}\right)^2}=\frac{4\lg^2 3}{\lg^2 8}>\frac{4\lg^2 3}{\lg^2 9}=1$，$\therefore \log_4 3>\log_3 2$

$\because 2^5 > 3^3$，$\therefore 2 > 3^{\frac{3}{5}}$，$\therefore \log_3 2 > \log_3 3^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}$

$\therefore \log_4 3 > \log_3 2 > \frac{3}{5}$

$\therefore 2 > \frac{1}{b} > \frac{1}{a} > \frac{8}{5}$，$\therefore \frac{1}{2} < b < a < \frac{5}{8}$，$\therefore c < \frac{1}{2} < b < a < \frac{5}{8} = d$，故选A.

8. C　**解析**：对于A：$\because x^2 + 1 \geqslant 1$，$\therefore \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1) \leqslant 0$恒成立，则$\exists x \in R$，$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1) > 0$为假命题，故A错误；

对于B：当$a = 0$时，$4x + 1 > 0$不恒成立，故B错误；

对于C：$\because 3ab \leqslant \left(\frac{a + 3b}{2}\right)^2$，$\therefore ab \leqslant \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a + 3b}{2}\right)^2$，$\therefore 9 - (a + 3b) \leqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{(a + 3b)^2}{4}$，解得$a + 3b \geqslant 6$，故C正确；

对于D：当$a = b = 0$时，得不到$\frac{a}{b} = -1$，但当$\frac{a}{b} = -1$时，必有$a + b = 0$，所以$\frac{a}{b} = -1$是$a + b = 0$的充分不必要条件，故D错误.

故选C.

9. A　**解析**：设$|AF| = m$，$|BF| = n$，

过点A，B分别作抛物线的准线的垂线，垂足分别为A'，B'，

则$|AA'| = m$，$|BB'| = n$，

因为点P为弦AB的中点，根据梯形中位线定理可得，P到抛物线C的准线$y = -\frac{p}{2}$的距离为$|PQ| = \frac{|AA'| + |BB'|}{2} = \frac{m + n}{2}$，

因为$\angle AFB = \frac{3\pi}{4}$，所以在$\triangle AFB$中，由余弦定理得$|AB|^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\frac{3\pi}{4} = m^2 + n^2 + \sqrt{2}\,mn$，

所以$\left(\frac{|AB|}{|PQ|}\right)^2 = \frac{|AB|^2}{|PQ|^2} = \frac{4\left(m^2 + n^2 + \sqrt{2}\,mn\right)}{(m + n)^2} = \frac{4\left[(m + n)^2 - \left(2 - \sqrt{2}\right)mn\right]}{(m + n)^2} = 4\left[1 - \frac{\left(2 - \sqrt{2}\right)mn}{(m + n)^2}\right]$，

又因为$(m + n)^2 \geqslant 4mn$，所以$\frac{\left(2 - \sqrt{2}\right)mn}{(m + n)^2} \leqslant \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$，当且仅当$m = n$时，等号成立，（$m$，$n$显然存在），

所以$\left(\frac{|AB|}{|PQ|}\right)^2 \geqslant 4\left(1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{4}\right) = 2 + \sqrt{2}$，最小值为$2 + \sqrt{2}$.

故选A.

10. A **解析**：对于①：过圆心的直线都可以将圆的周长和面积平分，所以对于任意一个圆，太极函数有无数个，故①正确

对于②：$f(-x) = \log_{\frac{1}{2}}(2^{-x} + 1) - \frac{1}{2}x = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1 + 2^x}{2^x}\right) - \frac{1}{2}x$，

$f(x) - f(-x) = \log_{\frac{1}{2}}\frac{(2^x + 1)}{\frac{2^x + 1}{2^x}} + x = -x + x = 0$，所以$f(x)$关于$y$轴对称，不是太极函数，故②错误；

对于③：中心对称图形必定是太极函数，对称点即为圆心.但太极函数只需平分圆的周长和面积，不一定是中心对称图形，故③错误；

对于④：曲线$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$存在对称中心,所以必是某圆的太极函数，故④正确.

故选A.

11. D　**解析**：记$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2023}$，

$\therefore f'(x)=2023\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2022}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+2023a_{2023}x^{2022}$

$\therefore f'(0)=2023\left(-\frac{1}{2}\right)^{2022}=a_1$，$\therefore a_1=\frac{2023}{2^{2022}}$，

$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right)=0=a_1+\frac{2a_2}{2}+\frac{3a_3}{2^2}+\cdots+\frac{2023a_{2023}}{2^{2022}}$，

$\therefore a_2+\frac{3}{2^2}a_3+\frac{4}{2^3}a_4+\cdots+\frac{2023}{2^{2022}}a_{2023}=f'\left(\frac{1}{2}\right)-f'(0)=-\frac{2023}{2^{2022}}$，故选D.

12. B　**解析**：由已知$\ln x+\ln(1-\lambda)\leqslant e^x+\lambda x$，

$\therefore \ln x+\ln(1-\lambda)\leqslant e^x+x+(\lambda-1)x$，

$\therefore \ln[(1-\lambda)x]+(1-\lambda)x\leqslant e^x+x$，即$\ln[(1-\lambda)x]+e^{\ln[(1-\lambda)x]}\leqslant e^x+x$.

构造函数$g(x)=e^x+x$，

$\therefore g(\ln[(1-\lambda)x])\leqslant g(x)$.

$\because g'(x)=e^x+1>0$，$\therefore g(x)$单调递增.

$\therefore \ln[(1-\lambda)x]\leqslant x$.

$\therefore (1-\lambda)x\leqslant e^x$，$1-\lambda\leqslant\frac{e^x}{x}$.

记$h(x)=\frac{e^x}{x}$，$\therefore 1-\lambda\leqslant h(x)_{\min}$，

$\because h'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，$\therefore h(x)_{\min}=h(1)=e$.

$\therefore 0<1-\lambda\leqslant e$，$\therefore 1-e\leqslant\lambda<1$.故选B.

13. 96　**解析**：$\bar{x}=3$，代入回归方程得$\bar{y}=140$，$\therefore 140\times5=50+a+142+185+227$，$\therefore a=96$.

14. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\ \sqrt{2}\right)$　**解析**：设$P(x_0,\ y_0)$，$A(x_1,\ y_1)$，因为A，B关于原点对称，所以$B(-x_1,\ -y_1)$，

$\therefore k_{PA}=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$，$k_{PB}=\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}$，$\therefore k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}$.

又因为点P，A都在双曲线上，所以$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$，两式相减得：$\frac{x_0^2-x_1^2}{a^2}=\frac{y_0^2-y_1^2}{b^2}$，$\therefore \frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=\frac{b^2}{a^2}$，

$\therefore k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{b^2}{a^2}\in\left(\frac{1}{4},\ 1\right)$，

$\therefore \frac{c^2-a^2}{a^2}=e^2-1\in\left(\frac{1}{4},\ 1\right)$，$\therefore \frac{\sqrt{5}}{2}<e<\sqrt{2}$.

15. $\frac{1+\sqrt{15}}{8}$　**解析**：$\because c=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$a\cos C=b-\frac{1}{2}=b-\frac{\sqrt{2}}{2}c$，$\therefore \sin A\cos C=\sin B-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin C$，

$\therefore \sin A\cos C=\sin(A+C)-\dfrac{\sqrt2}{2}\sin C$，展开得 $\sin C\cdot\left(\cos A-\dfrac{\sqrt2}{2}\right)=0$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\therefore b^2-b-\dfrac{7}{2}=0$，$b=\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$，所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac12 bc\sin A=\dfrac12\times\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}\times\dfrac{\sqrt2}{2}\times\dfrac{\sqrt2}{2}=\dfrac{1+\sqrt{15}}{8}$.

16.$(e^2\ln2,\ +\infty)$ **解析**：函数 $f(x)$ 恒有两个不同的极值点就等价于 $f'(x)=2^x-ax+e^2$ 恒有两个不同的变号零点，即方程 $2^x-ax+e^2=0$ 有两个不同的正实数根.

法一：数形结合：$2^x+e^2=ax$，令 $h(x)=2^x+e^2$，$g(x)=ax$，所以两函数在 y 轴右侧有两个交点，设 $h(x)$ 与 $y=kx$ 相切，切点为 $(x_0,\ y_0)$，$\therefore k_{切}=h'(x_0)=2^{x_0}\ln2$，所以切线方程为 $y=2^{x_0}\ln2\cdot x$，又因为 $\begin{cases}y_0=2^{x_0}\ln2\cdot x_0\\ y_0=2^{x_0}+e^2\end{cases}$ 解得 $x_0=\log_2 e^2$，$\therefore k_{切}=e^2\ln2$，

$\therefore a>e^2\ln2$.

法二：分离参数：记 $a=\dfrac{2^x+e^2}{x}$，记 $h(x)=\dfrac{2^x+e^2}{x}$，$h'(x)=\dfrac{2^x(x\ln2-1)-e^2}{x^2}$，

记 $g(x)=2^x(x\ln2-1)-e^2$，$g'(x)=2^x\cdot x\cdot\ln^2 2>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增，

当 $x=\log_2 e^2$ 时，$g(x)=0$，

$\therefore x\in(0,\ \log_2 e^2)$ 时，$g(x)<0$，$h'(x)<0$，$\therefore h(x)$ 单调递减，

$x\in(\log_2 e^2,\ +\infty)$ 时，$g(x)>0$，$h'(x)>0$，$\therefore h(x)$ 单调递增

$\therefore h(x)_{\min}=h(\log_2 e^2)=e^2\ln2$.

$x\to0$ 时，$h(x)\to+\infty$，

$x\to+\infty$ 时，由洛必达法则可知 $h(x)\to+\infty$.

$\therefore a>e^2\ln2$.

法三：方程 $2^x-ax+e^2=0$ 可变形为 $e^{\ln2^x}-ax+e^2=0$ 即 $e^{x\ln2}-ax+e^2=0$.

令 $t=x\ln2$，则 $e^t-\dfrac{at}{\ln2}+e^2=0\Rightarrow\dfrac{a}{\ln2}=\dfrac{e^t+e^2}{t}$，$t>0$，

即直线 $y=\dfrac{a}{\ln2}$ 与函数 $y=\dfrac{e^t+e^2}{t}$ 的图象在 y 轴右侧有两个不同的交点.

记 $g(t)=\dfrac{e^t+e^2}{t}$，则 $g'(t)=\dfrac{e^t\cdot t-(e^t+e^2)}{t^2}=\dfrac{e^t(t-1)-e^2}{t^2}$，

记 $h(t)=e^t(t-1)-e^2$，则 $h'(t)=e^t(t-1)+e^t\cdot1=e^t\cdot t>0$，

所以 $h(t)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增.

令 $h(t)=0$，得 $t=2$.

当 $t\in(0,\ 2)$ 时，$h(t)<0$，当 $t\in(2,\ +\infty)$ 时，$h(t)>0$，

所以 $g(t)$ 在 $(0,\ 2)$ 上单调递减，$(2,\ +\infty)$ 上单调递增.

所以 $\dfrac{a}{\ln2}>g(2)=e^2$，

$\therefore a>e^2\ln2$.

17.解：（1）由已知 $\begin{cases}a_1q^2+a_1q^4=40\\ a_1q^3=16\end{cases}$ 两式相除得 $2q^2-5q+2=0$，解得 $q=2$ 或 $q=\dfrac12$（舍）

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n$ ………………………………………………………… 6分

（2）$b_n=\log_2 a_n=n$，$c_n=n\cdot2^n$

$S_n=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$
$2S_n=1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+n\cdot 2^{n+1}$
两式相减 $-S_n=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot 2^{n+1}=2^{n+1}-2-n\cdot 2^{n+1}$
$\therefore S_n=(n-1)2^{n+1}+2$ …………………………………………………………………… 12分

18. 解：(1) 10名被调查者中，灯光舞美的满意度指标为0的共2人，灯光舞美的满意度指标为1的共5人，灯光舞美满意度指标为2的共3人，

记“从10名被电话调查的人中任选2人，这2人对灯光舞美的满意度指标不同”为事件A，

$\therefore P(A)=\dfrac{C_5^1\cdot C_2^1+C_5^1\cdot C_3^1+C_2^1\cdot C_3^1}{C_{10}^2}=\dfrac{31}{45}$ …………………………………………………… 4分

(2) 计算10名被调查者的综合指标，可列下表：

人员编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
综合指标	4	4	6	2	4	5	3	5	1	3

其中满意程度为“非常满意”的共6名，则m的值可能为4，5，6；满意程度不是“非常满意”的共4名，则n的值可能为1，2，3，所以随机变量X所有可能的取值为1，2，3，4，5.

$P(X=1)=\dfrac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_6^1\cdot C_4^1}=\dfrac{1}{4}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_3^1\cdot C_1^1+C_2^1\cdot C_2^1}{C_6^1\cdot C_4^1}=\dfrac{7}{24}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_3^1\cdot C_1^1+C_2^1\cdot C_1^1+C_1^1\cdot C_2^1}{C_6^1\cdot C_4^1}=\dfrac{7}{24}$，

$P(X=4)=\dfrac{C_1^1\cdot C_1^1+C_2^1\cdot C_1^1}{C_6^1\cdot C_4^1}=\dfrac{1}{8}$，

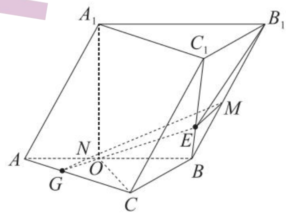
$P(X=5)=\dfrac{C_1^1\cdot C_1^1}{C_6^1\cdot C_4^1}=\dfrac{1}{24}$， …………………………………………………………………… 10分

所以随机变量X的分布列为

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{24}$

$E(X)=1\times\dfrac{1}{4}+2\times\dfrac{7}{24}+3\times\dfrac{7}{24}+4\times\dfrac{1}{8}+5\times\dfrac{1}{24}=\dfrac{29}{12}$. ………………………………… 12分

19. 解析：(1) 过E作$EM\,/\!/\,B_1C_1$交BB_1于M，过G作$GN\,/\!/\,BC$交AB于N，



$\because G$，E分别为AC，BC_1的三等分点，

$\therefore EM=\dfrac{1}{3}B_1C_1$，$GN=\dfrac{1}{3}BC$，

$\therefore EM/\!/GN$，$EM=GN$，

$\therefore GNME$是平行四边形 ………………………………………………… 4分

$\therefore GE/\!/NM$，$NM\subset$面ABB_1A_1

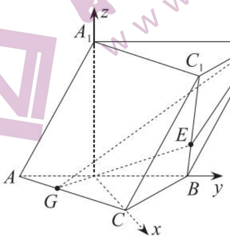
$\therefore GE\,/\!/$面AA_1B_1B. …………………………………………………………………………… 6分

(2) 证明：$\because AC=BC$，O为AB中点，$OC\perp AB$

$\because A_1O\perp$底面ABC，以O为原点，OC、OB、OA_1所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系$O-xyz$如图，则$A(0,\ -3,\ 0)$，$B(0,\ 3,\ 0)$，$C(3,\ 0,\ 0)$，$A_1(0,\ 0,\ 4)$，$B_1(0,\ 6,\ 4)$，

$C_1(3,\ 3,\ 4)$. $\therefore G(1,\ -2,\ 0)$. $\because \overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC_1}$, $\therefore E\left(1,\ 3,\ \frac{4}{3}\right)$, ………………………………… 8分

$\therefore \overrightarrow{GE}=\left(0,\ 5,\ \frac{4}{3}\right)$. $\overrightarrow{B_1E}=\left(1,\ -3,\ -\frac{8}{3}\right)$



设平面 B_1GE 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1E}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{GE}=0\end{cases}$，即

$\begin{cases}x-3y-\frac{8}{3}z=0\\ 5y+\frac{4}{3}z=0\end{cases}$，取 $z=3$，得 $\vec{n}=\left(\frac{28}{5},\ -\frac{4}{5},\ 3\right)$， ……… 10分

又底面 ABC 的一个法向量为 $\vec{m}=(0,\ 0,\ 1)$，设所求二面角的大小为 θ，

$$\cos\theta=\left|\cos\langle\vec{m},\ \vec{n}\rangle\right|=\frac{3}{\sqrt{\left(\frac{28}{5}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2+9}}=\frac{3\sqrt{41}}{41}$$

所以二面角 B_1-l-B 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{41}}{41}$ ………………………………………………………………… 12分

20. 解：（1）设 F_1，F_2 关于 l_2 的对称点分别为 F_1'，F_2'，$\because$ O 为线段 F_1F_2 的中点，$\therefore$ P 是 $F_1'F_2'$ 的中点，$\therefore$ $F_1'F_2'$ 是圆的直径，$\therefore |F_1'F_2'|=|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，$\therefore c=\sqrt{3}$， ………………………… 2分

由已知 $b=1$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ……………………………………………………………… 4分

（2）设点 $M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，其中 $x_1<x_2$.

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx\end{cases}\Rightarrow(1+4k^2)x^2=4$.

$\therefore x_1=\frac{-2}{\sqrt{1+4k^2}}$，$x_2=\frac{2}{\sqrt{1+4k^2}}$ ………………………………………………………………… 6分

$|MN|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+4k^2}}$.

点 A、B 到直线 l_1 的距离分别为 $d_1=\frac{2k}{\sqrt{1+k^2}}$，$d_2=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$. ……………………… ………8分

$$S_{AMBN}=\frac{1}{2}|MN|\cdot(d_1+d_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+4k^2}}\cdot\frac{1+2k}{\sqrt{1+k^2}}=2\sqrt{\frac{4k^2+4k+1}{1+4k^2}}=2\sqrt{1+\frac{4}{\frac{1}{k}+4k}}$$

…… 10分

$\because \frac{1}{k}+4k\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{k}\cdot 4k}=4$，当且仅当 $k=\frac{1}{2}$ 时取等号.

$\therefore 0<\frac{1}{\frac{1}{k}+4k}\leqslant\frac{1}{4}$，$\therefore 1<1+\frac{4}{\frac{1}{k}+4k}\leqslant 2$，$\therefore S_{AMBN}\in\left(2,\ 2\sqrt{2}\right]$. ………………………… 12分

21. 解析：（1）当 $a=e$ 时，$f'(x)=\frac{e}{x}$，

设直线与 $f(x)$ 的切点为 $(x_1,\ y_1)$，$k_{切}=f'(x_1)=\frac{e}{x_1}$，切线方程为 $y=\frac{e}{x_1}x$

$\because \begin{cases} y = \dfrac{e}{x_1}x_1 \\ y = e\ln x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = e \\ y_1 = e \end{cases} \therefore k_{切} = 1$，所以切线方程为 $y = x$ ……………………………… 2分

$\because g(x) = be^x$，$g'(x) = be^x$，设直线与 $g(x)$ 的切点为 (x_2, y_2)，$\therefore k_{切} = g'(x_2) = be^{x_2}$，

$\begin{cases} y_2 = be^{x_2} \cdot x_2 \\ y_2 = be^{x_2} \end{cases} \Rightarrow x_2 = 1$，$\because k_{切} = g'(x_2) = be^{x_2} = 1$，$\therefore b = \dfrac{1}{e}$ ……………………………… 4分

（2）由已知 $xe^x = a(x + \ln x) = a\ln(xe^x)$ 有两根 x_1，x_2，$(0 < x_1 < x_2)$，

要证：$x_1 \cdot x_2 > e^{2-(x_1+x_2)}$，即证：$x_1e^{x_1} \cdot x_2e^{x_2} > e^2$.

令 $t_1 = x_1e^{x_1}$，$t_2 = x_2e^{x_2}$，$\therefore t_1$，t_2 是方程 $t = a\ln t$ 的两根，即 $\dfrac{\ln t_1}{t_1} = \dfrac{\ln t_2}{t_2}$，

即证 $t_1 \cdot t_2 > e^2$. ……………………………… 6分

令 $\varphi(t) = \dfrac{\ln t}{t}$，$\therefore \varphi(t_1) = \varphi(t_2)$.

$\varphi'(t) = \dfrac{1 - \ln t}{t^2}$，

$t \in (0, e)$ 时，$\varphi'(t) > 0$，$\varphi(t)$ 单调递增；

$t \in (e, +\infty)$ 时，$\varphi'(t) < 0$，$\varphi(t)$ 单调递减. ……………………………… 8分

当 $t \to 0$ 时，$\varphi(t) \to -\infty$，当 $t \to +\infty$ 时，$\varphi(t) \to 0$. $\therefore 0 < t_1 < e < t_2$，

记 $H(t) = \varphi(t) - \varphi\left(\dfrac{e^2}{t}\right) \quad 0 < t < e$，

$H'(t) = \varphi'(t) + \dfrac{e^2}{t^2}\varphi'\left(\dfrac{e^2}{t}\right) \quad = (1 - \ln t) \cdot \dfrac{e^2 - t^2}{e^2 \cdot t^2}$，

$\because 0 < t < e$，$\therefore H'(t) > 0$，$\therefore H(t)$ 单调递增，$\therefore H(t) < H(e) = 0$.

$\therefore \varphi(t) < \varphi\left(\dfrac{e^2}{t}\right)$. ……………………………… 10分

$\because 0 < t_1 < e$，$\therefore \varphi(t_1) < \varphi\left(\dfrac{e^2}{t_1}\right)$ ，即 $\varphi(t_2) < \varphi\left(\dfrac{e^2}{t_1}\right)$.

$\because t_2$，$\dfrac{e^2}{t_1} \in (e, +\infty)$，$\varphi(t)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减，

$\therefore t_2 > \dfrac{e^2}{t_1}$，即 $t_1t_2 > e^2$，得证. ……………………………… 12分

22. 选修4-4.

解：（1）$\because$ 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 4 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = 4 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ （t 为参数），$\therefore$ 直线 l 的普通方程为 $x + y - 8 = 0$，又

$\because$ 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 8\sin\theta$，所以 $\rho^2 = 8\rho\sin\theta$，所以曲线 C 的普通方程为 $x^2 + y^2 = 8y$，即

$x^2 + (y - 4)^2 = 16$，又因为 A 在圆 C 上，圆心 C 到直线 l 的距离为 $\dfrac{|-4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$，所以 A 到 l 距离的最

大值为 $2\sqrt{2} + 4$. ……………………………… 5分

（2）因为 $\begin{cases} x + y - 8 = 0 \\ x^2 + y^2 = 8y \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4x = 0$，$x = 0$ 或 $x = 4$，又 $\because$ B 在第一象限，$\therefore B(4, 4)$. 点 A，B

在曲线 C 上，设 $A\left(\rho_1, \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{7\pi}{12}\right)$，$B\left(\rho_2, \dfrac{\pi}{4}\right)$，代入曲线 C 的极坐标方程得 $\rho_1 = |OA| = 8\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{7\pi}{12}\right) =$

4，$\therefore \rho_2=|OB|=8\sin\frac{\pi}{4}=4\sqrt{2}$， …………………………………………………………… 8分

所以ΔAOB的面积为$S=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=4+4\sqrt{3}$. ………………………………… 10分

23.选修4-5

解：（1）当$a=2$时，$f(x)=|x-2|+|x+4|$

当$x\geqslant 2$时，$f(x)=x-2+x+4=2x+2\geqslant 7$，$\therefore x\geqslant\frac{5}{2}$.

当$-4\leqslant x<2$时，$f(x)=6\geqslant 7$，无解.

当$x<-4$时，$f(x)=2-x-x-4=-2x-2\geqslant 7$，$\therefore x\leqslant-\frac{9}{2}$.

综上不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,x\geqslant\frac{5}{2}\text{或}x\leqslant-\frac{9}{2}\right\}$. ………………………………………………………5分

（2）由已知$f(x_1)_{\min}>g(x_2)_{\max}$，

$\because f(x)=|x-a|+|x+3a-2|\geqslant|(x-a)-(x+3a-2)|=|4a-2|$，$\therefore f(x_1)_{\min}=|4a-2|$，

$g(x_2)_{\max}=g(a)=a^2+1$. ……………………………………………………………………………… 8分

$\therefore|4a-2|>a^2+1$等价于$4a-2>a^2+1$或$4a-2<-a^2-1$，

解得$1<a<3$或$-2-\sqrt{5}<a<-2+\sqrt{5}$. ……………………………………………………… 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。