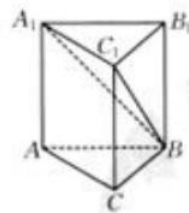


江苏省百校联考高三年级第三次考试 数学试卷

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,请把答案填涂在答题卡相应位置上.

- 已知复数 z 满足 $(1+2i)(z-1)=-2+i$, 则 $|z| =$
 A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 3
- 设集合 $M = \{x | e^{x-1} > 1\}$, $N = \{x | x^2 - 2x < 0\}$, 则 $M \cup N =$
 A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$
- 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 0 的等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1 = b_1 = 1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$, 设 $c_n = a_n + b_n$, 则数列 $\{c_n\}$ 的前 10 项和为
 A. 567 B. 568 C. 1078 D. 1079
- 设 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O , 半径为 2, 若 $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AO}$, 且 $|\vec{OA}| = |\vec{AC}|$, 则向量 \vec{BA} 在向量 \vec{BC} 上的投影为
 A. 3 B. -3 C. $\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$
- 某学习小组 8 名同学在一次物理测验中的得分(单位:分)如下: 83, 84, 86, 87, 88, 90, 93, 96. 这 8 名同学成绩的第 60 百分位数是 n . 若在该小组中随机选取 2 名同学, 则这 2 名同学的得分均小于 n 的概率为
 A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{15}{28}$ C. $\frac{3}{14}$ D. $\frac{9}{14}$
- 我国古代数学名著《九章算术》对立体几何问题有着深入的研究, 从其中的一些数学用语可见, 譬如“堑堵”指底面为直角三角形且侧棱垂直于底面的三棱柱, “阳马”指底面是矩形且有一侧棱垂直于底面的四棱锥, “鳖臑”指四个面都是直角三角形的三棱锥. 现有一如图所示的“堑堵” $ABC-A_1B_1C_1$, 其中 $AC \perp BC$, 若 $AA_1 = AB = 4$, 则“阳马” $B-A_1ACC_1$ 体积的最大值为
 A. $\frac{16}{3}$
 B. $\frac{32}{3}$
 C. 16
 D. 32
- 若 $\tan(\pi + \theta) - \frac{1}{\tan(2\pi - \theta)} = \frac{10}{3}$, $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, 则 $\sqrt{2} \sin(2\theta + \frac{\pi}{4}) + 2\cos^2(-\theta) =$
 A. $-\frac{3}{10}$ B. $-\frac{2}{5}$
 C. $-\frac{1}{5}$ D. 0



8. 已知函数 $f(x) = \sin \pi x + \frac{x}{x-1} - 1$, 则直线 $y = 2x - 2$ 与 $f(x)$ 的图象的所有交点的横坐标之和为

- A. 2 B. 1 C. 4 D. 0

二、选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 请把答案填涂在答题卡相应位置上. 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 不选或有错选的得 0 分.

9. 已知一组数据 x_1, x_2, \dots, x_{13} 构成等差数列, 且公差不为 0. 若去掉数据 x_7 , 则

- A. 平均数不变 B. 中位数不变 C. 方差变小 D. 方差变大

10. 设函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$), 若 $f(x) = f(\frac{2\pi}{3} - x)$, $f(x) = -f(\pi - x)$, 且

$f(x)$ 的最小正周期大于 $\frac{\pi}{2}$, 则

- A. $\omega = 3$
B. $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上单调递增
C. $f(x)$ 是偶函数
D. $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $g(x) = 2\sin 3x$ 的图象

11. 已知抛物线 $C: y = \frac{1}{4}x^2$ 的焦点为 F , P 为 C 上一点, 下列说法正确的是

- A. 抛物线 C 的准线方程为 $y = -\frac{1}{16}$
B. 直线 $y = x - 1$ 与 C 相切
C. 若 $M(0, 4)$, 则 $|PM|$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$
D. 若 $M(3, 5)$, 则 $\triangle PMF$ 的周长的最小值为 11

12. 若函数 $f(x)$ 是定义域为 $(0, +\infty)$ 的单调函数, 且对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(f(x) - \log_2 x) = 6$, 且方程 $|f(x) - 4| = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5 + t$ 在区间 $(0, 2]$ 上有两个不同解, 则实数 t 的取值可能为

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 请把答案填写在答题卡相应位置上.

13. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 为奇函数, 且满足 $f(1+x) = f(3+x)$. 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) = x^3 - x$, 则 $f(\frac{11}{2}) + f(6) = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

14. 已知 $a > 0$, $(x^2 + \frac{a}{x})^6$ 的展开式中所有项的系数和为 64, 则展开式中的常数项为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$. (用数字作答)

15. 设 $k \in \mathbf{R}$, 直线 $l_1: kx + y - k = 0$, 直线 $l_2: x - ky + 2k - 3 = 0$, 记 l_1, l_2 分别过定点 A, B , l_1 与 l_2 的交点为 C , 则 $|AC| + |BC|$ 的最大值为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

16. 小王自主创业开了一家礼品店,平常需要用彩绳对礼品盒做一个捆扎(要求扎紧绳子不能松动),其中一种长方体的礼品盒一般都是采用“十字捆扎”(如图1所示),后来他又学习了一种新的彩绳捆扎方法“对角捆扎”(如图2所示),并认为“对角捆扎”比一般的“十字捆扎”包装更节省彩绳. 设长方体礼品盒的长、宽、高分别为 x, y, z , 则“十字捆扎”所需绳长为 \blacktriangle ; 若采用“对角捆扎”, 则所需绳长的最小值为 \blacktriangle . (注: 长方体礼品盒的高小于长、宽, 结果用含 x, y, z 的式子表示)

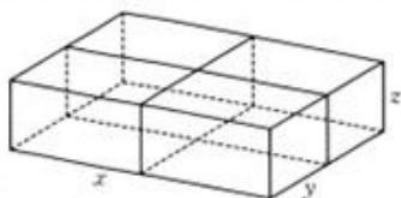


图1

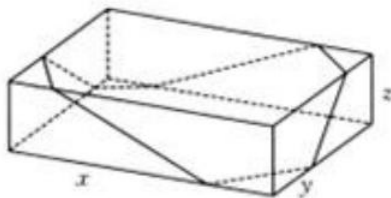


图2

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出必要的文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

设各项均为正数的数列 $\{a_n\}$, 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = \frac{1}{3}$, $S_{n+1} + S_n = 3a_{n+1}^2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{(n+1)a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

从① $2a - b = 2c \cos B$; ② $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 - c^2)$; ③ $\sqrt{3} \sin(A+B) = 1 + 2\sin^2 \frac{C}{2}$ 这三个条件中任

选一个, 补充在下列问题中, 并作答.

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\triangle ABC$ 的面积为 S , 已知 _____.

(1) 求 C 的值;

(2) 若 $b=4$, 点 D 在边 AB 上, CD 为 $\angle ACB$ 的平分线, $\triangle BCD$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 求 a 的值.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

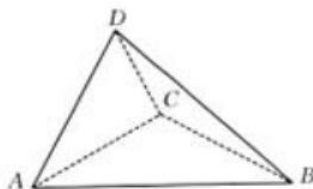


19. (本小题满分 12 分)

如图,在三棱锥 $A-BCD$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, 平面 $ACD \perp$ 平面 ABC , $AC=BC=4$, $DC=2$, $AD=2\sqrt{3}$.

(1)证明: $AD \perp$ 平面 BCD .

(2)设点 E 在线段 AB 上, 直线 DE 与直线 BC 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$, 求平面 DCE 与平面 ACD 所成的锐二面角的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

某学校为学生开设了一门模具加工课, 经过一段时间的学习, 拟举行一次模具加工大赛, 学生小明、小红打算报名参加大赛.

赛前, 小明、小红分别进行了为期一周的封闭强化训练, 下表记录了两人在封闭强化训练期间每天加工模具成功的次数, 其中小明第 7 天的成功次数 a 忘了记录, 但知道 $36 \leq a \leq 60$, $a \in \mathbf{Z}$.

	第一天	第二天	第三天	第四天	第五天	第六天	第七天
序号 x	1	2	3	4	5	6	7
小明成功次数	16	20	20	25	30	36	a
小红成功次数	16	22	25	26	32	35	35

(1)求这 7 天内小明成功的总次数不少于小红成功的总次数的概率;

(2)根据小明这 7 天内前 6 天的成功次数, 求其成功次数 y 关于序号 x 的线性回归方程, 并估计小明第七天成功次数 a 的值.

参考公式: 回归方程 $\hat{y} = bx + \hat{a}$ 中斜率与截距的最小二乘估计公式分别为

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - b\bar{x}.$$

参考数据: $1 \times 16 + 2 \times 20 + 3 \times 20 + 4 \times 25 + 5 \times 30 + 6 \times 36 = 582$; $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91$.

1. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$ 和 $F_2(1,0)$, 且椭圆 C 经过点 $M(1, \frac{3}{2})$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 过点 $F_2(1,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 则在 x 轴上是否存在定点 N , 使得 $\vec{NP} \cdot \vec{NQ}$ 的值为定值? 若存在, 求出点 N 的坐标和该定值; 若不存在, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = a(x-3)e^x - \frac{1}{3}x^3 + x^2$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $a = \frac{1}{e}$, 判断 $f(x)$ 的单调性.

(2) 设 $f(x)$ 有且只有两个不同的极值点 x_1, x_2 .

(i) 求 a 的取值范围;

(ii) 当 $a > -\frac{e}{4}$ 时, 设 $x_1 < x_2$, 证明: $0 \leq f(x_1) < \frac{49}{24}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线