

2023 年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练

文科数学

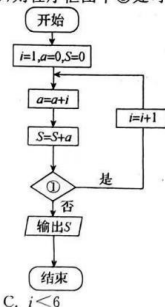
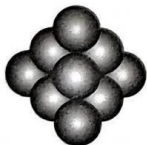
本试卷总分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合 $A = \{x | y = \sqrt{-|x| + 2}\}$, $B = \{y | y = x^2 - 2x + 2\}$, 则 $A \cap B =$
A. $[-2, 2]$ B. $[0, +\infty)$ C. $[1, 2]$ D. $[0, 2]$
- 已知 $(1+2i)z = 9+3i$, 则 z 在复平面对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- 已知 D 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, $\vec{AD} = 2\vec{AB}$, E 为 AC 边的中点, 则
A. $\vec{DE} = \vec{AC} - 2\vec{AB}$ B. $\vec{DE} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$ C. $\vec{DE} = \frac{1}{2}\vec{AC} - 2\vec{AB}$ D. $\vec{DE} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AB}$
- 已知 $\tan(\alpha + 15^\circ) = 7\tan(\alpha - 15^\circ)$, 则 $\sin(\alpha - 15^\circ)\cos(\alpha + 15^\circ) =$
A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{7}{12}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{12}$
- 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = -1, n(a_{n+1} - a_n) = \frac{2}{n+1}$, 记 $\langle a_n \rangle$ 为不小于 a_n 的最小整数, $b_n = \langle a_n \rangle$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 2 023 项和为
A. 2 020 B. 2 021 C. 2 022 D. 2 023
- 南宋时期的数学家杨辉所著的《详解九章算法》中有一个如图所示的“三角垛”问题, 在“三角垛”的最上层放有一个球, 第二层放有 3 个球, 第三层放有 6 个球, ……依此规律, 其相应的程序框图如图所示。若输出的 S 的值为 56, 则程序框图中①处可以填入
A. $i < 4$ B. $i < 5$ C. $i < 6$ D. $i < 7$



- 净水机通过分级过滤的方式使自来水逐步达到纯净水的标准, 其工作原理中有多次的 PP 棉滤芯过滤, 其中第一级过滤一般由孔径为 5 微米的 PP 棉滤芯(聚丙烯熔喷滤芯)构成, 其结构是多层式, 主要用于去除铁锈、泥沙、悬浮物等各种大颗粒杂质。假设每一层 PP 棉滤芯可以过滤掉三分之一的大颗粒杂质, 若过滤前水中大颗粒杂质含量为 80 mg/L。现要满足过滤后水中大颗粒杂质含量不超过 2 mg/L, 则 PP 棉滤芯的层数最少为(参考数据: $\lg 2 \approx 0.30, \lg 3 \approx 0.48$)
A. 9 B. 8 C. 7 D. 6

- 在一个正方体内放置一个最大的圆锥, 使圆锥的底面在正方体的底面上, 圆锥的顶点在正方体的上底面内, 记正方体的体积为 V_1 , 圆锥的体积为 V_2 , 则 $V_1 : V_2$ 约为(注: $\pi \approx 3$)
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

- 已知 $a = \log_8 8, b = \frac{e^2}{4}, c = \frac{e^{2023}}{2 \cdot 023^2}$, 则
A. $c < b < a$ B. $a < b < c$ C. $a < c < b$ D. $b < a < c$

- 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 若 $f(\frac{\pi}{3} + x) = -f(\frac{\pi}{3} - x), f(\frac{\pi}{6} + x) = f(\frac{\pi}{6} - x)$, 且 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ 上单调, 则 $f(\frac{3\pi}{4})$ 的值为
A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

- 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 以 F_1, F_2 为直径的圆与双曲线在第二象限的部分交于点 P , 若双曲线上的点 Q 满足 $\vec{F_1P} = \frac{2}{3}\vec{F_2Q}$, 则双曲线的离心率为
A. $\frac{\sqrt{37}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{35}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{37}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x < 0, \\ -x^2 + 2x, & x \geq 0, \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f^2(x) - (2+t)f(x) + 2t = 0$ 有 3 个不同的实数根, 则实数 t 的取值范围为
A. $(-\infty, -\frac{1}{e})$ B. $(-\frac{1}{e}, 0)$ C. $[-\frac{1}{e}, 1]$ D. $(-e, 2)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

- 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 与圆 $C: (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$, 直线 $l: 2x - y + 4 = 0$ 交圆 O 于 A, B 两点, 交圆 C 于 D, E 两点, M, N 分别为 AB, DE 的中点, 则 $|MN| =$ _____。
- 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0, \\ 2x + y - 2 \leq 0, \\ x - 2y - 1 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = 2x - y$ 的最小值为 _____。
- 已知单位向量 a, b 满足 $(a - 2b) \cdot (3a + 5b) = -\frac{22}{3}$, 则向量 a 与向量 b 夹角的余弦值为 _____。
- 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过点 F 的直线 l 交抛物线于 A, B 两点, AB 的中点为 P , 以 AB 为直径的圆与 y 轴交于 M, N 两点, 则 $\angle MPN$ 有 _____ 值(填最大或最小), 此时 $\sin \angle MPN =$ _____。

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:共 60 分。

17. (12 分)

记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_3=5, a_2>0$, 且 $S_6=(a_2+1)S_3$ 。

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

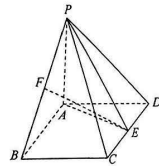
(2)求数列 $\left\{\frac{n+S_n}{3^n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n 。

18. (12 分)

如图,四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形, $\angle ABC=60^\circ, AP=AB, PB=2\sqrt{2}$, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD, E, F$ 分别为 CD, PB 的中点。

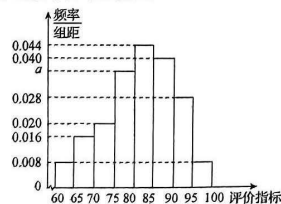
(1)证明: $CD \perp$ 平面 PAE ;

(2)求点 A 到平面 PEF 的距离。



19. (12 分)

某乒乓球教练决定检验学员某项技能的水平, 随机抽取 100 位学员进行测试, 并根据该项技能的评价指标, 按 $[60, 65), [65, 70), [70, 75), [75, 80), [80, 85), [85, 90), [90, 95), [95, 100]$ 分成 8 组, 得到如图所示的频率分布直方图。



(1)求 a 的值, 并估计该项技术的评价指标的中位数(精确到 0.1);

(2)根据频率分布直方图求样本评价指标的平均数(同一组的数据用该组区间的中点值作代表), 若平均数与中位数之差的绝对值小于 1, 则认为该项技能的水平有显著稳定性; 否则不认为有显著稳定性, 请依数据给出答案;

(3)在选取的 100 位学员中, 其中训练时间不少于 1 年的(记为 A 队)与少于 1 年的(记为 B 队)人数相同, 若规定评价指标不低于 80 为优秀, 低于 80 为良好, 经统计训练时间不少于 1 年的有 40 个学员评价指标为优秀, 请列出 2×2 列联表, 并判断是否有 99% 的把握认为“评价指标是否优秀与训练时间有关”。

文科数学试题(二) 第 3 页(共 4 页)

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$ 。

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.010
k_0	2.706	3.841	6.635

20. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A, B , 长轴长为短轴长的 2 倍, 点 P 在 C 上运动, 且 $\triangle ABP$ 面积的最大值为 8。

(1)求 C 的方程;

(2)若直线 l 经过点 $Q(1, 0)$, 交 C 于 M, N 两点, 直线 AM, BN 分别交直线 $x=4$ 于 D, E 两点, 试问 $\triangle ABD$ 与 $\triangle AQE$ 的面积之比是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 说明理由。

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = (a-1)x + \ln x, g(x) = \frac{1}{2}ax^2 (a \in \mathbb{R})$ 。

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)当 $a > 2$ 时, 证明: 函数 $\varphi(x) = g(x) - f(x)$ 有两个不同的零点。

(二)选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 + 4\rho \sin \theta + 12 - a = 0 (a > 8)$ 。

(1)求 l 的普通方程和 C 的直角坐标方程;

(2)当 l 与 C 有公共点时, 求实数 a 的取值范围。

23. [选修 4-5: 不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x) = 2|x+2| - |x-5|$ 。

(1)求不等式 $f(x) \geq 4$ 的解集;

(2)若 $f(x) \geq a^2 + 2a - 10$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围。

文科数学试题(二) 第 4 页(共 4 页)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：
www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线