

高二年级数学（理）试题 202306

一、选择题（共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分）

1. 用反证法证明命题：“若 $a, b \in \mathbb{Z}$ ， ab 能被 3 整除，那么 a, b 中至少有一个能被 3 整除”时，假设应为（ ）

- A. a, b 都不能被 3 整除
B. a, b 都能被 3 整除
C. a, b 不都能被 3 整除
D. a, b 中有一个能被 3 整除

2. 若 $y = \cos \frac{\pi}{3}$ ，则 $y' =$ （ ）

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
B. 0
C. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 函数 $f(x) = x^3 - 3x + a$ ， $x \in [-2, 0]$ 的最小值为 1，则实数 a 的值为（ ）

- A. 1
B. -4
C. 3
D. -1

4. 已知离散型随机变量 ξ 的分布列如表：

则其数学期望 $E(\xi) =$ （ ）

- A. 1
B. 1.3
C. 2.1
D. 3.2

ξ	1	2	3
P	0.3	m	0.4

5. 设 z_1, z_2 是复数，则下列命题中的假命题是（ ）

- A. 若 $|z_1 - z_2| = 0$ ，则 $z_1 = z_2$
B. 若 $|z_1| = |z_2|$ ，则 $z_1^2 = z_2^2$
C. 若 $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2}$ ，则 $|z_1| = |z_2|$
D. 若 $z_1 = \overline{z_2}$ ，则 $\overline{z_1} = z_2$

6. 曲线 $f(x) = \ln x - \frac{2}{x}$ 在 $x = 1$ 处切线的倾斜角为 α ，则 $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha - 4 \cos \alpha} =$ （ ）

- A. $\frac{1}{5}$
B. $-\frac{1}{5}$
C. 1
D. -1

7. 观察数组：(1, 1, 1)，(2, 2, 4)，(3, 4, 12)，(4, 8, 32)，……， (a_n, b_n, c_n) ，则 c_7 的值是（ ）

- A. 1024
B. 704
C. 448
D. 192

8. 函数 $f(x) = x - \ln x^2$ 的单调递增区间是（ ）

- A. $(-\infty, 0)$ 和 $(0, 2)$
B. $(2, +\infty)$
C. $(0, 2)$
D. $(-\infty, 0)$ 和 $(2, +\infty)$

9. 某班有男生 30 人，从中选 10 人均分 2 组（即每组 5 人），那么不同的选派法有（ ）

- A. $C_{30}^{10} \cdot C_{10}^5$
B. $\frac{C_{30}^{10} \cdot C_{10}^5}{2}$
C. $C_{30}^{10} \cdot C_{10}^5 \cdot A_2^2$
D. $C_{30}^5 \cdot C_{25}^5 \cdot A_2^2$

10. 已知函数 $f(x) = \ln x + f'(1)x^2 + f(1)x + 2$ ，则 $f'(e) =$ （ ）

- A. $\frac{1}{e} - 2e + 1$ B. $2e^2 + 5e + 1$ C. $\frac{1}{e} - 4e + 1$ D. $-2e^2 + e + 3$

11. 已知函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数, 若当 $x > 0$ 时, $xf'(x) + f(x) > 0$, 且 $f(2) = 0$, 则不等式 $f(x) > 0$ 的解集是 ()

- A. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ B. $(-2, 0) \cup (0, 2)$
C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

12. 若过点 (a, b) 可作曲线 $y = x^2 - 2x$ 的两条切线, 则点 (a, b) 可以是 ()

- A. $(0, 0)$ B. $(1, 1)$ C. $(2, 0)$ D. $(3, 2)$

二、填空题 (共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 若 $z = \frac{2+mi}{1+i}$ 为纯虚数, 则复数 z 的虚部为_____.

14. 已知 x, y 的对应值如下表所示:

若 y 与 x 线性相关, 且回归直线方程为 $y = 1.3x + 0.8$,

则 $m =$ _____.

x	1	3	4	5	7
y	1	m	$2m+1$	$2m+3$	10

15. 曲线 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为_____.

16. $(x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^4$ 展开式中常数项为_____.

三、解答题 (共 5 个小题, 每小题 14 分, 共 70 分)

17. 设函数 $y = f(x)$ 对任意实数 x, y 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy - 1$.

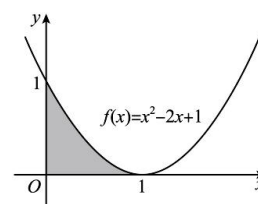
(1) 求 $f(0)$ 的值; (2) 若 $f(1) = 4$, 求 $f(2)$ 、 $f(3)$ 、 $f(4)$ 的值;

(3) 在 (2) 的条件下, 猜想 $f(n)$ (n 为正整数) 的表达式, 并证明.

18. 已知二次函数 $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

(1) 求 $y = f(x)$ 的图象与两坐标轴所围成图形的面积;

(2) 求 $y = f(x)$ 的图象与两坐标轴所围成图形绕 x 轴旋转一周形成的旋转体的体积.



19. 某校“足球社团”调查学生喜欢足球是否与性别有关，现从全校学生中随机抽取了 $80k$ ($k \in N^*$) 人，若被抽查的男生与女生人数之比为 $5:3$ ，男生中喜欢足球的人数占男生的 $\frac{3}{5}$ ，女生中喜欢足球的人数占女生的 $\frac{1}{3}$. 经计算，有 95% 的把握认为喜欢足球与性别有关，但没有 99% 的把握认为喜欢足球与性别有关.

(1) 请完成下面的列联表，并求出 k 的值；

	喜欢足球	不喜欢足球	合计
男生			
女生			
合计			

$P(\chi^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.01	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

(2) 将频率视为概率，用样本估计总体，从全校男学生中随机抽取 4 人，记其中喜欢足球的人数为 X ，求 X 的分布列及数学期望.

附： $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$.

20. 某学校有 A, B 两家餐厅，王同学第 1 天午餐时随机的选择一家餐厅用餐. 如果第一天去 A 餐厅，那么第 2 天去 A 餐厅的概率为 0.4 ，如果第 1 天去 B 餐厅，那么第 2 天去 A 餐厅的概率为 0.8 .

(1) 计算王同学第 2 天去 A 餐厅用餐的概率；

(2) 王同学某次在 A 餐厅就餐，该餐厅提供 4 种西式点心，6 种中式点心，王同学从这些点心中选择三种点心，记选择西式点心的种数为 X ，求 $P(X \geq 1)$.

21. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{e^x}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2) 若 $e^x f(x) \geq a + \ln x$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

