

绝密★启用前

贵州省卓越发展计划高二测试

数学 2023.6

考生在答题前请认真阅读本注意事项及答题要求：

1. 本试卷共6页，满分为150分，考试时间为120分钟。
2. 答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
将条形码横贴在答题卡上“条形码粘贴虚线框”内，若没有条形码，可以填涂准考证号的方式。
3. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。回答非选择题时，用黑色字迹钢笔或签字笔将答案填写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2, 4\}$ ， $B = \{x \mid |x - 1| \leq 1\}$ ，则 $A \cap B =$
A. $\{-1, 2\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2\}$
2. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$ ， $a + 2i = (b + i)i$ （ i 为虚数单位），则
A. $a = 1, b = -2$ B. $a = -1, b = 2$ C. $a = -1, b = -2$ D. $a = 1, b = 2$
3. 下列函数中，最小正周期为 π 的偶函数是
A. $y = \sin(2x + \frac{\pi}{2})$ B. $y = \sin x + \cos x$
C. $y = \sin 2x + \cos 2x$ D. $y = \cos(2x + \frac{\pi}{2})$
4. 某学校共 1000 人参加数学测验，考试成绩 ξ 近似服从正态分布 $N(100, \sigma^2)$ ，若 $P(80 \leq \xi \leq 100) = 0.45$ ，则 $P(\xi \geq 120) =$
A. 0.1 B. 0.9 C. 0.45 D. 0.05
5. “斐波那契数列”由十三世纪意大利数学家列昂纳多·斐波那契发现，因为斐波那契以兔子繁殖为例子而引入，故又称该数列为“兔子数列”。已知数列 $\{a_n\}$ 为“斐波那契数列”且满足： $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3, n \in \mathbb{N}^*)$ ，则 $a_4 + a_8 =$
A. 12 B. 16 C. 24 D. 39

6. 在 $\triangle ABC$ 中, E 为 AC 上一点, $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AE}$, P 为线段 BE 上任一点, 若

$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值是

- A. $3+2\sqrt{2}$ B. $4+2\sqrt{3}$ C. 6 D. 8

7. 第24届冬季奥林匹克运动会, 即2022年北京冬季奥运会, 是由中国举办的国际性奥林匹克赛事, 于2022年2月4日开幕, 2月20日闭幕. 有4名大学生参加了冬奥会新闻中心志愿服务, 下列说法正确的是

- A. 将4名志愿者每人都安排一项工作(一共4项不同的工作)的不同方法数为24种
B. 将4名志愿者分配到3个采访场馆, 每个采访场馆至少分配一名志愿者, 所有分配方案共有72种
C. 将4名志愿者安排到七天中服务, 每天一人, 甲两天, 乙三天, 丙和丁各一天, 不同的安排方法有140种
D. 将4名志愿者分配到记者招待会、集体采访2个项目进行培训, 每名志愿者分配到1个项目, 每个项目至少分配到1名志愿者, 不同的分配方案共有14种

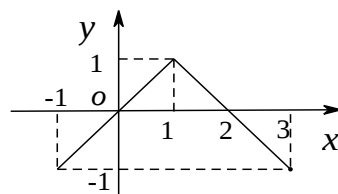
8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数, 且满足 $f(-x) + f(x) = 0$, $f'(x) > 1$, $f(-1) = -2$, 则不等式 $f(x-1) > x$ 的解集是

- A. $(-1, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(3, +\infty)$

二、选择题(本题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对得5分, 部分选对得2分, 有错选的得0分。)

9. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 图象关于直线 $x=1$ 对称, 且 $f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 内的图象如图所示, 下列说法正确的是

- A. $f(-4) < f(5)$ B. $f(x-4) = f(x+1)$
C. 直线 $x=-3$ 是函数的一条对称轴
D. 点 $(4, 0)$ 为函数的一个对称中心



10. 已知向量 $\vec{a} = (\sqrt{3}, 1)$, $\vec{b} = (\cos \theta, \sin \theta)$, 则下列说法正确的是

- A. 若 $\theta = \frac{2\pi}{3}$, 则 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\pi}{2}$ B. 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $\theta = \frac{\pi}{6}$

C. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的最大值为 $\sqrt{3}+1$

D. $|\vec{a}-\vec{b}|$ 的取值范围是 $[1,3]$

11. 如图, 在直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, E 是 AC 的中点, D , E 分别

是 BC 与 AC 上的任一点, $BD = \lambda BC$, $AE = \mu AC$, $AB = BC = BB_1$,

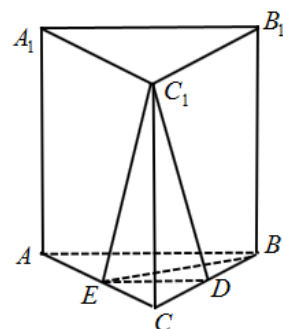
则下列结论正确的是

A. 存在 $\lambda, \mu \in (0,1)$, 使得 $BE \perp C_1E$

B. 平面 $B_1EB \perp$ 平面 ABC

C. 若 $A_1B_1 \parallel$ 平面 DEC_1 , 则 $\lambda = \mu = \frac{1}{3}$

D. 若 $\angle ABC = 60^\circ$, 则平面 BDE 与平面 B_1C_1E 所成的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{57}}{19}$



12. 已知实数 a , b 满足 $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 1$, 且 $\ln a \ln b = 1$, 则

A. $2^a > 2^b$

B. $ab > e^2$

C. $\log_2(ab+1) < \log_2(a+b)$

D. $e^{a-b} > \frac{a}{b}$

第 II 卷

三、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。)

13. $(2x + \frac{1}{x})^4$ 展开式的常数项是_____; (用数字作答)

14. 一个家庭有两个小孩, 假设生男生女是等可能的, 已知这个家庭有一个是女孩的条件下, 这时另一个也是女孩的概率是_____;

15. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A , 点 P , Q 均在 C 上, 且关于 y 轴对称. 若直线 AP , AQ 的斜率之积为 $\frac{1}{3}$, 则 C 的离心率为_____;

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 4$, $na_{n+1} = 2(n+1)a_n$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____;

若数列 $\{\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}\}$ 的前 n 项和 S_n , 则满足不等式 $S_n \geq 30$ 的 n 的最小值为_____.

四、解答题 (本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤。)

17. 请在下列三个条件中选择一个作为条件补充在题目的横线上, 并解决问题.

$$\textcircled{1} \frac{b}{\sin A + \sin C} = \frac{a-c}{\sin B} + \frac{c}{\sin A + \sin C}.$$

$$\textcircled{2} 2a \cos B = 2c - b.$$

$$\textcircled{3} a^2 - b^2 = ac \cos B - \frac{1}{2}bc.$$

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且_____

(1) 求 A ;

(2) 若 $a = 2$, 点 D 在线段 BC 上, 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, 求 AD 的最大值.

18. 牛排主要分为菲力牛排, 肉眼牛排, 西冷牛排, T 骨牛排, 某牛肉采购商从采购的一批牛排中随机抽取 100 盒, 利用牛排的分类标准得到的数据如下:

牛排种类	菲力牛排	肉眼牛排	西冷牛排	T 骨牛排
数量/盒	20	30	20	30

(1) 用比例分配的分层随机抽样方法从这 100 盒牛排中抽取 10 盒, 再从抽取的 10 盒牛排中随机抽取 4 盒, 求恰好有 2 盒牛排是 T 骨牛排的概率;

(2) 若将频率视为概率, 用样本估计总体, 从这批牛排中随机抽取 3 盒, 若 X 表示抽到的菲力牛排的数量, 求 X 的分布列和数学期望.

19. 2022 年 12 月 2 日晚, 神舟十四号、神舟十五号航天员乘组进行在轨交接仪式, 两个乘组移交了中国空间站的钥匙, 6 名航天员分别在确认书上签字, 中国空间站正式开启长期有人驻留模式. 为调查大学生对中国航天事业的了解情况, 某大学进行了一次抽样调查, 若被调查的男女生人数均为 $20n (n \in \mathbf{N}^*)$, 统计得到以下列联表, 经计算, $\chi^2_{0.025} \leq \chi^2 < \chi^2_{0.01}$.

	男生	女生	合计
了解		$10n$	
不了解	$5n$		

合计			
----	--	--	--

附表及公式：

α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.001
χ^2_{α}	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

(1) 求 n 的值.

(2) 现采用分层抽样的方法在调查结果“了解中国航天事业”的学生中抽取 5 人，再从这 5 人中抽取 3 人进行第二次调查，以便了解学生获得中国航天事业信息的渠道，则至少有 2 名男生被第二次调查的概率.

20. 如图 1，已知 $ABFE$ 是直角梯形， $EF \parallel AB$ ， $\angle ABF = 90^\circ$ ， $\angle BAE = 60^\circ$ ， C 、 D 分别为 BF 、 AE 的中点， $AB = 5$ ， $EF = 1$ ，将直角梯形 $ABFE$ 沿 CD 翻折，使得二面角 $F-DC-B$ 的大小为 60° ，如图 2 所示，设 N 为 BC 的中点.

(1) 证明： $FN \perp AD$ ；

(2) 若 M 为 AE 上一点，且 $\frac{AM}{AE} = \lambda$ ，则当 λ 为何值时，直线 BM 与平面 ADE 所成角的正弦值为 $\frac{5\sqrt{7}}{14}$.

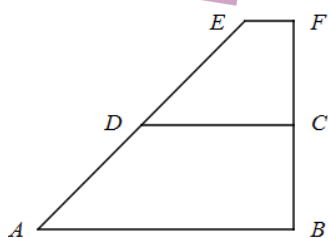


图1

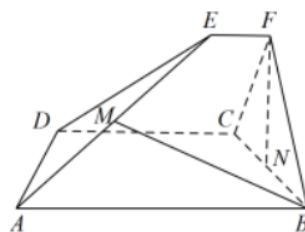


图2

21. 设抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 点 $D(p, 0)$, 过 F 的直线交 C 于 M, N 两点. 当直线 MD 垂直于 x 轴时, $|MF| = 3$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设直线 MD, ND 与 C 的另一个交点分别为 A, B , 记直线 MN, AB 的倾斜角分别为 α, β . 当 $\alpha - \beta$ 取得最大值时, 求直线 AB 的方程.

22. 已知函数 $f(x) = \ln(x+1)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程;

(2) 当 $a \geq 1$ 时, 证明: $f(x) \leq a^2 e^x - a$.