高三数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：集合、常用逻辑用语、函数、导数及其应用、三角函数、解三角形、平面向量、复数、数列。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{y\mid y=2|\sin x|\}$，$B=\{x\mid x^2+x-2\leqslant 0\}$，则 $A\cup B=$

A. $[-2,2]$　　B. $[-2,1]$　　C. $[0,1]$　　D. $[0,2]$

2. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$，若 $|\boldsymbol{b}|=3$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{13}$，则 $|\boldsymbol{a}|=$

A. 2　　B. 3　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

3. 若 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，则 $\sin\left(2\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=$

A. $-\frac{7}{25}$　　B. $-\frac{16}{25}$　　C. $\frac{7}{25}$　　D. $\frac{16}{25}$

4. 已知虚数 z 满足 $z^2-z+1=0$，则 $|z|=$

A. 0　　B. 1　　C. 0或1　　D. 2

5. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，其公比为 q，设 $p:q>1$，$r:a_{2\,022}<a_{2\,023}$，则 p 是 r 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 我们知道二氧化碳是温室性气体，是全球变暖的主要元凶. 在室内二氧化碳含量的多少也会对人体健康带来影响. 下表是室内二氧化碳浓度与人体生理反应的关系：

室内二氧化碳浓度(单位：ppm)	人体生理反应
不高于1 000	空气清新，呼吸顺畅
1 000～2 000	空气浑浊，觉得昏昏欲睡
2 000～5 000	感觉头痛，嗜睡，呆滞，注意力无法集中
大于5 000	可能导致缺氧，造成永久性脑损伤，昏迷甚至死亡

《室内空气质量标准》和《公共场所卫生检验办法》给出了室内二氧化碳浓度的国家标准为：室内二氧化碳浓度不大于0.1%(0.1%即为1 000 ppm)，所以室内要经常通风换气，保持二氧化碳浓度水平不高于标准值. 经测定，某中学刚下课时，一个教室内二氧化碳浓度为2 000 ppm，若开窗通风后二氧化碳浓度 $y\%$ 与经过时间 t(单位：分钟)的关系式为 $y=0.05+\lambda e^{-\frac{t}{9}}$ $(\lambda\in\mathbf{R})$，则该教室内的二氧化碳浓度达到国家标准需要开窗通风时间至少约为(参考数据：$\ln 3\approx 1.099$，$\ln 5\approx 1.609$)

A. 10分钟　　B. 11分钟　　C. 12分钟　　D. 20分钟

7. 在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，$2a\cos^2\frac{B}{2}=a+c$，则$\triangle ABC$为

A. 钝角三角形

B. 正三角形

C. 直角三角形

D. 等腰直角三角形

8. 已知函数$f(x)=\frac{3a+2\sin x+a\cos x}{3+\cos x}$的最大值与最小值之和为6，则实数$a$的值为

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

9. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差不为0，设S_n为其前n项和，若$S_9=0$，则集合$\{x|x=S_k,k=1,2,\cdots,2\ 023\}$中元素的个数为

A. 2 022　　B. 2 021　　C. 2 015　　D. 2 019

10. 已知函数$f(x)=\sin\omega x-\cos\omega x(\omega>0)$图象的相邻两条对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$，则下列结论错误的是

A. $f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{3\pi}{8},0\right)$对称

B. $f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$上单调递增

C. $f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的值域为$[-1,1]$

D. 将$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度，得到的函数图象关于y轴对称

11. 在各项均为正数的等差数列$\{a_n\}$中，a_1,a_2,a_6构成公比不为1的等比数列，S_n是$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和. 若$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$S_n<\frac{1}{a_1}$，则$a_1$的最小值为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

12. 已知$a,b,c\in(0,1)$，且$e^a\ln 2=2a$，$3e^b\ln 2=8b$，$2e^{c-2}=c$，则

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$

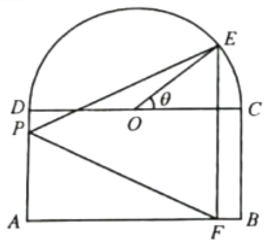
C. $b>c>a$　　D. $c>a>b$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知$a\in\mathbf{R}$，若复数$z=a^2-a-2+(a^2+3a+2)i$为纯虚数，则$a=$________.

14. 已知$f(x)=e^x-ax^2$，若曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为$y=bx+e$，则$\cos\frac{b\pi}{a}=$________.

15. 如图为矩形$ABCD$与半圆O的组合图形，其中$AB=2AD=2$，E为半圆弧上一点，$EF\perp AB$，垂足为F，点P在线段AD上，且$PE=PF$，设$\angle COE=\theta(0\leqslant\theta<\pi)$，则$\triangle PEF$的面积$S$与$\theta$的关系式为$S=$________；$S$的最大值为________.



16. 已知$f(x)=e^{ax}-\frac{1}{2}ax^2-x-1(a>0)$，若$\forall x\geqslant 0$，$f(x)\geqslant 0$恒成立，则实数$a$的取值范围为________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1=1, S_n=n^2a_n$.

(1)求 a_2, a_3；

(2)求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

18.（本小题满分 12 分）

(1)已知 $\dfrac{\sin(2\pi-\theta)\cos(\pi+\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cos\left(\frac{11\pi}{2}-\theta\right)}{\cos(\pi-\theta)\sin(3\pi-\theta)\sin(-\pi-\theta)\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)}=2$，求 $\cos 2\theta$；

(2)已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，求 $\alpha+\beta$ 的值.

19.（本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且 $a\sin(B-C)=b\sin(A-C)$.

(1)证明：$a=b$；

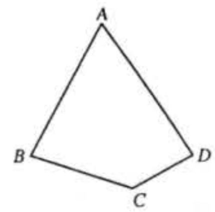
(2)若 $c=5$，$\cos C=\frac{12}{13}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

20.（本小题满分 12 分）

在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD=20$，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，$\angle BCD=\frac{2\pi}{3}$.

(1)若 $\angle ABC=\frac{5\pi}{12}$，求 BC 的长；

(2)求四边形 $ABCD$ 周长的最大值.



21.（本小题满分 12 分）

在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=7$，且数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 为等比数列.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)令 $b_n=(2n-1)a_n$，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

22.（本小题满分 12 分）

已知定义在 $[0,\pi]$ 上的函数 $f(x)=e^x-x-1-\frac{a}{2}x\sin x(a\in\mathbf{R})$.

(1)当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的最小值；

(2)若函数 $f(x)$ 有两个零点，求实数 a 的取值范围.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. A　由题意,得 $A=[0,2]$,$B=[-2,1]$,则 $A\cup B=[-2,2]$. 故选 A.

2. D　由题意,得 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=13$,即 $|\boldsymbol{a}|^2-3|\boldsymbol{a}|-4=0$,解得 $|\boldsymbol{a}|=4$,或 $|\boldsymbol{a}|=-1$(舍去). 故选 D.

3. C　$\sin\left(2\alpha+\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{7}{25}$. 故选 C.

4. B　设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R},y\neq0)$,则 $(x+y\mathrm{i})^2-(x+y\mathrm{i})+1=0$,即 $x^2-y^2-x+1+(2xy-y)\mathrm{i}=0$,根据复数相等的定义,得 $\begin{cases}2xy-y=0,\\x^2-y^2-x+1=0,\end{cases}$ 结合 $y\neq0$,解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\y^2=\frac{3}{4},\end{cases}$ 所以 $|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=1$. 故选 B.

5. D　由 $\{a_n\}$ 为等比数列,得 $a_n=a_1q^{n-1}$. ①若 $q>1$,则当 $a_1>0$ 时,$\{a_n\}$ 单调递增,所以 $a_{2\,022}<a_{2\,023}$;当 $a_1<0$ 时,$\{a_n\}$ 单调递减,所以 $a_{2\,022}>a_{2\,023}$. 因此充分性不成立;②若 $a_{2\,022}<a_{2\,023}$,则 $a_{2\,023}-a_{2\,022}=a_1q^{2\,021}(q-1)>0$,等价于 $a_1q(q-1)>0$,即 $\begin{cases}a_1>0,\\q<0\text{ 或 }q>1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1<0,\\0<q<1,\end{cases}$ 所以必要性也不成立. 故 p 是 r 的既不充分也不必要条件. 故选 D.

6. A　由题意知 $2\,000$ ppm$=0.2\%$,所以 $0.2=0.05+\lambda e^{-\frac{0}{9}}$,解得 $\lambda=0.15$;由 $0.05+0.15e^{-\frac{t}{9}}\leqslant0.1$,解得 $e^{-\frac{t}{9}}\leqslant\frac{1}{3}$,所以 $t\geqslant9\ln3\approx9.891$,于是至少需要开窗通风时间约为 10 分钟. 故选 A.

7. C　法一:因为 $2a\cos^2\frac{B}{2}=2a\cdot\frac{1+\cos B}{2}=a+a\cos B=a+c$,所以 $a\cos B=c$,由余弦定理,得 $a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=c$,整理得 $a^2=b^2+c^2$,所以 $A=\frac{\pi}{2}$,即△ABC 为直角三角形. 故选 C.

法二:由 $2a\cos^2\frac{B}{2}=a+c$,得 $2a\cdot\frac{1+\cos B}{2}=a+a\cos B=a+c$,即 $a\cos B=c$,所以 $\sin A\cos B=\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$,即 $\cos A\sin B=0$,因为 $\sin B\neq0$,所以 $\cos A=0$,又 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{\pi}{2}$,即△ABC 为直角三角形. 故选 C.

8. B　$f(x)=\frac{3a+2\sin x+a\cos x}{3+\cos x}=a+\frac{2\sin x}{3+\cos x}$,令 $g(x)=\frac{2\sin x}{3+\cos x}$(由题意知 $f(x)$ 既有最大值,也有最小值,所以 $g(x)$ 既有最大值,也有最小值),因为 $f(x)=g(x)+a$,所以 $f(x)_{\max}=g(x)_{\max}+a$,$f(x)_{\min}=g(x)_{\min}+a$,由题意知 $g(x)_{\max}+g(x)_{\min}+2a=6$,因为 $g(x)$ 为奇函数,所以 $g(x)_{\max}+g(x)_{\min}=0$,从而 $2a=6$,解得 $a=3$. 故选 B.

9. D　设 $\{a_n\}$ 的公差为 $d\,(d\neq0)$,因为 $S_9=0$,所以 $a_5=0$,所以 $a_4+a_5+a_6=3a_5=0$,$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=5a_5=0$,$a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8=7a_5=0$,所以 $S_4=S_6$,$S_3=S_5$,$S_2=S_7$,$S_1=S_8$,其余皆不同,所以 $\{x\,|\,x=S_k,k=1,2,\cdots,2\,023\}$ 中元素个数为 $2\,023-4=2\,019$. 故选 D.

10. C　由题意知 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{4}\right)$,由 $f(x)$ 的图象相邻两对称轴间距离为 $\frac{\pi}{2}$,得 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$($T$ 为 $f(x)$ 的最小正周期),所以 $T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$,解得 $\omega=2$,于是 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$. 因为 $f\left(-\frac{3\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\left[2\times\left(-\frac{3\pi}{8}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin(-\pi)=0$,所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{3\pi}{8},0\right)$ 对称,故 A 正确;由 $-\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}$,得 $-\frac{\pi}{8}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{8}$,所以 $f(x)$ 的一个单调增区间为 $\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$,又 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$,所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增,故 B 正确;由 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$,得 $0\leqslant2x\leqslant\pi$,所以 $-\frac{\pi}{4}\leqslant2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3}{4}\pi$,从而 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant1$,所以 $f(x)\in[-1,\sqrt{2}]$,故 C 错误;因为 $f\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{2}\cos2x$ 为偶函数,所以 $y=-\sqrt{2}\cos2x$ 的图象关于 y 轴对称,故 D 正确. 故选 C.

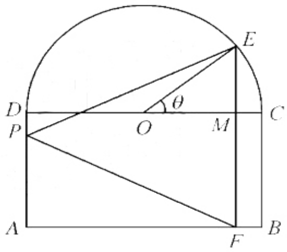
11. A　设 $\{a_n\}$ 的公差为 d,则 $d>0$,且 $(a_1+d)^2=a_1(a_1+5d)$,解得 $d=3a_1$,所以 $a_n=3a_1n-2a_1$. 从而 $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{3a_1^2}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$,所以 $S_n=\frac{1}{3a_1^2}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3a_1^2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{3a_1^2}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3a_1^2}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$,即 $S_n<\frac{1}{3a_1^2}$. 若 $\forall n\in\mathbf{N}^*$,$S_n<\frac{1}{a_1}$,则 $\frac{1}{3a_1^2}\leqslant\frac{1}{a_1}$,解得 $a_1\geqslant\frac{1}{3}$. 故选 A.

12. B　令 $f(x)=\frac{e^x}{x}(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}(x>0)$，所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 由已知，得 $\frac{e^a}{a}=\frac{2}{\ln 2}=\frac{e^{\ln 4}}{\ln 4}$，$\frac{e^b}{b}=\frac{8}{\ln 8}=\frac{e^{\ln 8}}{\ln 8}$，$\frac{e^c}{c}=\frac{e^2}{2}$，即 $f(a)=f(\ln 4)$，$f(b)=f(\ln 8)$，$f(c)=f(2)$，因为 $1<\ln 4<2<\ln 8$，且 $f(x)$ 在 $(1,-\infty)$ 上单调递增，所以 $f(\ln 4)<f(2)<\ln(8)$，即 $f(a)<f(c)<f(b)$，又 $a,b,c\in(0,1)$，且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $a>c>b$. 故选 B.

13. 2　由 z 为纯虚数，得 $\begin{cases}a^2-a-2=0,\\a^2-3a+2\neq 0,\end{cases}$ 解得 $a=2$.

14. -1　$f'(x)=e^x-2ax$，则 $f'(1)=e-2a$，又 $f(1)=e-a$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(e-a)=(e-2a)(x-1)$，即 $y=(e-2a)x+a$，从而 $\begin{cases}b=e-2a,\\a=e,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=e,\\b=-e,\end{cases}$ 所以 $\cos\frac{b\pi}{a}=\cos(-\pi)=-1$.

15. $\frac{1+\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta}{2}$　(2 分)　$\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$（3 分）



如图，设 EF 与 CD 的交点为 M，则 $EM=\sin\theta$，$OM=|\cos\theta|$，所以 $EF=1+\sin\theta$，$DM=1+\cos\theta$. 所以 $S=\frac{1}{2}EF\cdot DM=\frac{(1+\sin\theta)(1-\cos\theta)}{2}=\frac{1+\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta\cos\theta}{2}$ $(0\leqslant\theta<\pi)$，令 $t=\sin\theta+\cos\theta$，则 $\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$，且 $t\in(-1,\sqrt{2}]$，所以 $S=\frac{1}{4}(t+1)^2$，显然 $S=\frac{1}{4}(t+1)^2$ 在 $(-1,\sqrt{2}]$ 上单调递增，所以当 $t=\sqrt{2}$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，S 取得最大值，其最大值为 $\frac{3+2\sqrt{2}}{4}$.

16. $[1,+\infty)$　$f'(x)=ae^{ax}-ax-1$，令 $g(x)=ae^{ax}-ax-1$，则 $g'(x)=a(ae^{ax}-1)$，令 $g'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}$.
①若 $0<a<1$，当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}\right)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}\right)$ 时，$g(x)<g(0)=a-1<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，于是，当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}\right)$ 时，$f(x)<f(0)=0$，与题意不符；②当 $a\geqslant 1$ 时，$a(ae^{ax}-1)\geqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,-\infty)$ 上单调递增，从而 $g(x)\geqslant g(0)=a-1\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，于是 $f(x)\geqslant f(0)=0$，符合题意. 综上，实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

17. 解：(1)因为 $a_1=1$，$S_n=n^2a_n$，

所以当 $n=2$ 时，$S_2=4a_2$，即 $a_1+a_2=4a_2$，解得 $a_2=\frac{1}{3}$；……………… 2 分

当 $n=3$ 时，$S_3=9a_3$，即 $a_1+a_2+a_3=9a_3$，解得 $a_3=\frac{1}{6}$. ……………… 4 分

(2)因为 $S_n=n^2a_n$，所以当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=(n-1)^2a_{n-1}$，……………… 5 分

两式相减，得 $S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$，即 $(n^2-1)a_n=(n-1)^2a_{n-1}$，

所以 $(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}(n\geqslant 2)$. ……………… 6 分

因为 $a_1=1$，所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}(n\geqslant 2)$，……………… 7 分

所以 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\cdots\times\frac{a_4}{a_3}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_2}{a_1}\times a_1=\frac{n-1}{n+1}\times\cdots\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times 1=\frac{2}{n(n+1)}$.

当 $n=1$ 时，符合上式，所以 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}$. ……………… 10 分

18. 解：(1)由已知，得 $\frac{(-\sin\theta)\times(-\cos\theta)\times(-\sin\theta)\times(-\sin\theta)}{(-\cos\theta)\times\sin\theta\times\sin\theta\times\cos\theta}=-\tan\theta=2$，

即 $\tan\theta=-2$. ……………… 3 分

所以 $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=-\frac{3}{5}$. ……………… 6 分

(2)因为 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

所以 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，……………… 8 分

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{3\sqrt{2}}{5}-\frac{\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………… 10 分

由 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，得 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$，

所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$. ………………………………………………………… 12分

19. (1)证明：因为 $a\sin(B-C)=b\sin(A-C)$，

所以 $\sin A(\sin B\cos C-\cos B\sin C)=\sin B(\sin A\cos C-\cos A\sin C)$，…………………… 2分

即 $\sin A\cos B\sin C=\sin B\cos A\sin C$.

又 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq0$，从而 $\sin A\cos B-\sin B\cos A=0$，即 $\sin(A-B)=0$，

由 A,B 为 $\triangle ABC$ 的内角，得 $A-B\in(-\pi,\pi)$，…………………………………… 4分

所以 $A-B=0$，即 $A=B$.

所以 $a=b$. ………………………………………………………………………… 6分

(2)由余弦定理，得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

再由 $a=b$ 及 $c=5$，$\cos C=\frac{12}{13}$，得 $25=2a^2-\frac{24}{13}a^2$，

解得 $a^2=\frac{25\times13}{2}$. ………………………………………………………… 8分

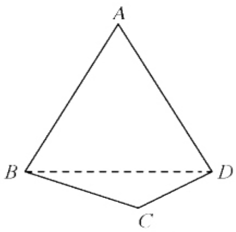
由 $\cos C=\frac{12}{13}$，$C\in(0,\pi)$，得 $\sin C=\frac{5}{13}$，……………………………………… 10分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot a^2\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{25\times13}{2}\times\frac{5}{13}=\frac{125}{4}$. …………………… 12分

20. 解：(1)连接 BD，则 $\triangle ABD$ 为等边三角形，所以 $BD=20$，$\angle ABD=\angle ADB=\frac{\pi}{3}$，

因为 $\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，$\angle BCD=\frac{2\pi}{3}$，$\angle ABC=\frac{5\pi}{12}$，所以 $\angle ADC=\frac{7\pi}{12}$，……………………… 2分

所以 $\angle BDC=\frac{\pi}{4}$. ………………………………………………………… 3分



在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理，得 $\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}$，

所以 $BC=\frac{BD\cdot\sin\angle BDC}{\sin\angle BCD}=\frac{20\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{20\sqrt{6}}{3}$. ……………………………… 5分

(2)法一：设 $\angle ABC=\theta\left(\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2\pi}{3}\right)$，则 $\angle DBC=\theta-\frac{\pi}{3}$，$\angle BDC=\frac{2\pi}{3}-\theta$，……………… 6分

在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理，得 $\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle DBC}$，………………………… 7分

所以 $BC=\frac{BD\sin\angle BDC}{\sin\angle BCD}=\frac{40\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)$，…………………………………… 8分

$CD=\frac{BD\sin\angle DBC}{\sin\angle BCD}=\frac{40\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$，……………………………………………… 9分

所以四边形 $ABCD$ 的周长 $l=40+\frac{40\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{40\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)=40+\frac{40\sqrt{3}}{3}\sin\theta$，……………… 10分

所以当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，周长取得最大值，且 $l_{max}=40+\frac{40\sqrt{3}}{3}$. ………………………………… 12分

法二：设 $BC=m$，$CD=n$，在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理得 $BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cos\angle BCD$，

即 $20^2=m^2+n^2-2mn\cos\frac{2\pi}{3}$，…………………………………………………… 8分

$400=m^2+n^2+mn=(m+n)^2-mn\geqslant(m+n)^2-\left(\frac{m+n}{2}\right)^2=\frac{3}{4}(m+n)^2$，……………………… 10分

因此 $m+n\leqslant\frac{40\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $m=n$，即 $BC=CD$ 时，等号成立. ……………………… 11分

所以四边形 $ABCD$ 周长的最大值为 $40+\frac{40\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………… 12分

21. 解：(1)因为 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=7$，所以 $a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=4$，

所以等比数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 的公比为 2，首项为 2. ……………………………………… 1分

所以 $a_{n+1}-a_n=2\times2^{n-1}-2^n$， ………………………………………… 2 分

从而 $a_n-a_{n-1}=2^{n-1}$，$a_{n-1}-a_{n-2}=2^{n-2}$，…，$a_2-a_1=2^1$，

以上各式累加，得 $a_n-a_1=2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\dfrac{2(1-2^{n-1})}{1-2}=2^n-2$， ………………………………………… 4 分

将 $a_1=1$ 代入，解得 $a_n=2^n-1$.

而 $a_1=1$ 适合 $a_n=2^n-1$，

故 $a_n=2^n-1$. ………………………………………… 5 分

(2)由(1)知 $b_n=(2n-1)\cdot2^n-(2n-1)$， ………………………………………… 6 分

所以 $S_n=(1\times2-1)+(3\times2^2-3)+(5\times2^3-5)+\cdots+[(2n-1)\cdot2^n-(2n-1)]$

$=[1\times2+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2n-1)\cdot2^n]-[1+3+5+\cdots+(2n-1)]$， ………………………………………… 7 分

令 $A_n=1\times2+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2n-1)\cdot2^n$，

则 $2A_n=1\times2^2+3\times2^3+5\times2^4+\cdots+(2n-1)\cdot2^{n+1}$，

两式相减，得 $-A_n=2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}-(2n-1)\cdot2^{n+1}$， ………………………………………… 8 分

$=2+\dfrac{2^3(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)\cdot2^{n+1}=-6+(3-2n)\cdot2^{n+1}$，

所以 $A_n=(2n-3)\cdot2^{n+1}+6$. ………………………………………… 10 分

又 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=\dfrac{n[1+(2n-1)]}{2}=n^2$，

所以 $S_n=(2n-3)\cdot2^{n+1}-n^2+6$. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-x-1-\dfrac{1}{2}x\sin x\,(x\in[0,\pi])$.

所以 $f'(x)=e^x-1-\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}x\cos x$.

令 $g(x)=e^x-1-\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}x\cos x\,(x\in[0,\pi])$，则 $g'(x)=e^x-\cos x+\dfrac{1}{2}x\sin x$， ………………………………………… 1 分

因为 $x\in[0,\pi]$，所以 $e^x-\cos x\geqslant0$，$\dfrac{1}{2}x\sin x\geqslant0$， ………………………………………… 2 分

所以 $g'(x)\geqslant0$(当且仅当 $x=0$ 时等号成立)，所以 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上是增函数，

从而 $g(x)\geqslant g(0)=0$，即 $f'(x)\geqslant0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上是增函数，

于是 $f(x)_{\min}=f(0)=0$. ………………………………………… 4 分

(2)因为 $f(0)=0$，所以 0 为 $f(x)$ 的一个零点，

则问题转化为探究 $f(x)$ 在 $(0,\pi]$ 上只有一个零点， ………………………………………… 5 分

当 $a\leqslant1$ 时，由(1)可知 $f(x)=e^x-x-1-\dfrac{a}{2}x\sin x\geqslant e^x-x-1-\dfrac{1}{2}x\sin x>0$，

即 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi]$ 无零点，不合题意； ………………………………………… 6 分

当 $a>1$ 时，$f'(x)=e^x-1-\dfrac{a}{2}\sin x-\dfrac{a}{2}x\cos x$，

令 $h(x)=e^x-1-\dfrac{a}{2}\sin x-\dfrac{a}{2}x\cos x\,(0<x\leqslant\pi)$，则 $h'(x)=e^x-a\cos x+\dfrac{a}{2}x\sin x$，

令 $m(x)=e^x-a\cos x+\dfrac{a}{2}x\sin x\,(0<x\leqslant\pi)$，则 $m'(x)=e^x+\dfrac{3a}{2}\sin x+\dfrac{a}{2}x\cos x$. ………………………………………… 7 分

①当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$m'(x)>0$，所以 $m(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

又 $m(0)=1-a<0$，$m\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}+\dfrac{\pi a}{4}>0$，则存在唯一的实数 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使 $m(x_0)=0$，

所以当 $x\in(0,x_0)$ 时，$m(x)<0$；当 $x\in\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$m(x)>0$. ………………………………………… 8 分

②当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$\cos x<0$，$\sin x>0$，$m(x)=e^x-a\cos x+\dfrac{a}{2}x\sin x>0$.

由①②知，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$m(x)<0$；当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$m(x)>0$， ………………………………………… 9 分

即当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 (x_0,π) 上单调递增，

因为 $h(0)=0$，所以 $h(x_0)<0$，即 $f'(0)=0$，$f'(x_0)<0$， ………………………………………… 10 分

又 $f'(\pi)=e^\pi-1+\dfrac{\pi a}{2}>0$，所以存在唯一实数 $x_1\in(x_0,\pi)$，使 $f'(x_1)=0$，

所以当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_1,\pi)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，在 (x_1,π) 上单调递增. ………………………………………… 11 分

因为 $f(0)=0$，所以 $f(x_1)<0$，又 $f(\pi)=e^\pi-\pi-1>0$，

所以存在唯一实数 $x_2\in(x_1,\pi)$，使 $f(x_2)=0$，即 $f(x)$ 在 $(0,\pi]$ 内有唯一零点 x_2.

综上，函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有两个零点时，实数 a 的取值范围是 $(1,+\infty)$. ………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。