数学Ⅰ试题参考答案

一、填空题：本题考查基础知识、基本运算和基本思想方法．每小题 5 分，共计 70 分．

1．{1，8}	2．2	3．90	4．8
5．[2，+∞）	6．$\frac{3}{10}$	7．$-\frac{\pi}{6}$	8．2
9．$\frac{\sqrt{2}}{2}$	10．$\frac{4}{3}$	11．-3	12．3
13．9	14．27		

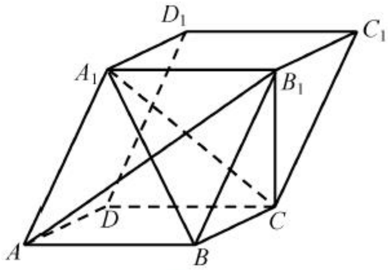
二、解答题

15．本小题主要考查直线与直线、直线与平面以及平面与平面的位置关系，考查空间想象能力和推理论证能力．满分 14 分．

证明：（1）在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB \parallel A_1B_1$．

因为 $AB \not\subset$ 平面 A_1B_1C，$A_1B_1 \subset$ 平面 A_1B_1C，

所以 $AB \parallel$ 平面 A_1B_1C．



（第 15 题）

（2）在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形 ABB_1A_1 为平行四边形．

又因为 $AA_1=AB$，所以四边形 ABB_1A_1 为菱形，

因此 $AB_1 \perp A_1B$．

又因为 $AB_1 \perp B_1C_1$，$BC \parallel B_1C_1$，

所以 $AB_1 \perp BC$．

又因为 $A_1B \cap BC=B$，$A_1B \subset$ 平面 A_1BC，$BC \subset$ 平面 A_1BC，

所以 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BC．

因为 $AB_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1，

所以平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 A_1BC．

16．本小题主要考查同角三角函数关系、两角和（差）及二倍角的三角函数，考查运算求解能力．满分 14 分．

解：（1）因为 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，所以 $\sin\alpha=\frac{4}{3}\cos\alpha$．

因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$，

因此，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{7}{25}$．

（2）因为 α,β 为锐角，所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$．

又因为$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

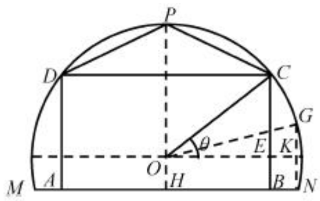
因此$\tan(\alpha+\beta)=-2$．

因为$\tan\alpha=\frac{4}{3}$，所以$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{24}{7}$，

因此，$\tan(\alpha-\beta)=\tan[2\alpha-(\alpha+\beta)]=\frac{\tan 2\alpha-\tan(\alpha+\beta)}{1+\tan 2\alpha\tan(\alpha+\beta)}=-\frac{2}{11}$．

17．本小题主要考查三角函数的应用、用导数求最值等基础知识，考查直观想象和数学建模及运用数学知识分析和解决实际问题的能力．满分 14 分．

解：（1）连结 *PO* 并延长交 *MN* 于 *H*，则 *PH*⊥*MN*，所以 *OH*=10．



（第 17 题）

过 *O* 作 *OE*⊥*BC* 于 *E*，则 *OE*∥*MN*，所以∠*COE*=ϑ，

故 *OE*=40cosϑ，*EC*=40sinϑ，

则矩形 *ABCD* 的面积为 2×40cosϑ（40sinϑ+10）=800（4sinϑcosϑ+cosϑ），

△*CDP* 的面积为$\frac{1}{2}$×2×40cosϑ（40–40sinϑ）=1600（cosϑ–sinϑcosϑ）．

过 *N* 作 *GN*⊥*MN*，分别交圆弧和 *OE* 的延长线于 *G* 和 *K*，则 *GK*=*KN*=10．

令∠*GOK*=ϑ_0，则 sinϑ_0=$\frac{1}{4}$，ϑ_0∈（0，$\frac{\pi}{6}$）．

当ϑ∈[ϑ_0，$\frac{\pi}{2}$）时，才能作出满足条件的矩形 *ABCD*，

所以 sinϑ的取值范围是[$\frac{1}{4}$，1）．

答：矩形 *ABCD* 的面积为 800（4sinϑcosϑ+cosϑ）平方米，△*CDP* 的面积为 1600（cosϑ–sinϑcosϑ），sinϑ的取值范围是[$\frac{1}{4}$，1）．

（2）因为甲、乙两种蔬菜的单位面积年产值之比为 4∶3，

设甲的单位面积的年产值为 4*k*，乙的单位面积的年产值为 3*k*（*k*>0），

则年总产值为 4*k*×800（4sinϑcosϑ+cosϑ）+3*k*×1600（cosϑ–sinϑcosϑ）

=8000*k*（sinϑcosϑ+cosϑ），ϑ∈[ϑ_0，$\frac{\pi}{2}$）．

设 *f*（ϑ）= sinϑcosϑ+cosϑ，ϑ∈[ϑ_0，$\frac{\pi}{2}$），

则$f'(\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta-\sin\theta=-(2\sin^2\theta+\sin\theta-1)=-(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)$．

令$f'(\theta)=0$，得ϑ=$\frac{\pi}{6}$，

当ϑ∈（ϑ_0，$\frac{\pi}{6}$）时，$f'(\theta)>0$，所以 *f*（ϑ）为增函数；

当$\vartheta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$时，$f'(\theta)<0$，所以$f(\vartheta)$为减函数，

因此，当$\vartheta=\frac{\pi}{6}$时，$f(\vartheta)$取到最大值．

答：当$\vartheta=\frac{\pi}{6}$时，能使甲、乙两种蔬菜的年总产值最大．

18．本小题主要考查直线方程、圆的方程、圆的几何性质、椭圆方程、椭圆的几何性质、直线与圆及椭圆的位置关系等知识，考查分析问题能力和运算求解能力．满分 16 分．

解：（1）因为椭圆 C 的焦点为$F_1(-\sqrt{3},0),F_2(\sqrt{3},0)$，

可设椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$．又点$(\sqrt{3},\frac{1}{2})$在椭圆 C 上，

所以$\begin{cases}\frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1,\\ a^2-b^2=3,\end{cases}$，解得$\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1,\end{cases}$

因此，椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$．

因为圆 O 的直径为F_1F_2，所以其方程为$x^2+y^2=3$．

（2）①设直线 l 与圆 O 相切于$P(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，则${x_0}^2+{y_0}^2=3$，

所以直线 l 的方程为$y=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)+y_0$，即$y=-\frac{x_0}{y_0}x+\frac{3}{y_0}$．

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=-\frac{x_0}{y_0}x+\frac{3}{y_0},\end{cases}$，消去 y，得

$(4{x_0}^2+{y_0}^2)x^2-24x_0x+36-4{y_0}^2=0$．（*）

因为直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点，

所以$\Delta=(-24x_0)^2-4(4{x_0}^2+{y_0}^2)(36-4{y_0}^2)=48{y_0}^2({x_0}^2-2)=0$．

因为$x_0,y_0>0$，所以$x_0=\sqrt{2},y_0=1$．

因此，点 P 的坐标为$(\sqrt{2},1)$．

②因为三角形 OAB 的面积为$\frac{2\sqrt{6}}{7}$，所以$\frac{1}{2}AB\cdot OP=\frac{2\sqrt{6}}{7}$，从而$AB=\frac{4\sqrt{2}}{7}$．

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由（*）得 $x_{1,2}=\dfrac{24x_0\pm\sqrt{48y_0^{\,2}(x_0^{\,2}-2)}}{2(4x_0^{\,2}+y_0^{\,2})}$，

所以 $AB^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

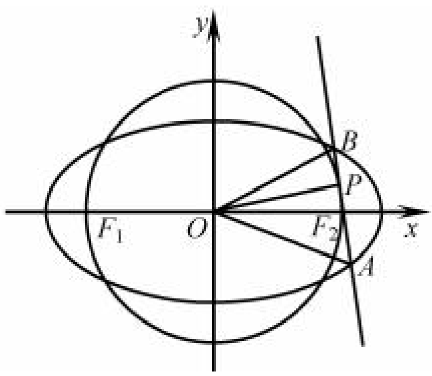
$=(1+\dfrac{x_0^{\,2}}{y_0^{\,2}})\cdot\dfrac{48y_0^{\,2}(x_0^{\,2}-2)}{(4x_0^{\,2}+y_0^{\,2})^2}$.

因为 $x_0^{\,2}+y_0^{\,2}=3$，

所以 $AB^2=\dfrac{16(x_0^{\,2}-2)}{(x_0^{\,2}+1)^2}=\dfrac{32}{49}$，即 $2x_0^{\,4}-45x_0^{\,2}+100=0$，

解得 $x_0^{\,2}=\dfrac{5}{2}(x_0^{\,2}=20$ 舍去)，则 $y_0^{\,2}=\dfrac{1}{2}$，因此 *P* 的坐标为 $(\dfrac{\sqrt{10}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$.

综上，直线 *l* 的方程为 $y=-\sqrt{5}x+3\sqrt{2}$.



19．本小题主要考查利用导数研究初等函数的性质，考查综合运用数学思想方法分析与解决问题以及逻辑推理能力．满分 16 分．

解：（1）函数 $f(x)=x$，$g(x)=x^2+2x-2$，则 $f'(x)=1$，$g'(x)=2x+2$.

由 $f(x)=g(x)$ 且 $f'(x)=g'(x)$，得

$\begin{cases}x=x^2+2x-2\\1=2x+2\end{cases}$，此方程组无解，

因此，$f(x)$ 与 $g(x)$ 不存在"*S*"点.

（2）函数 $f(x)=ax^2-1$，$g(x)=\ln x$，

则 $f'(x)=2ax$，$g'(x)=\dfrac{1}{x}$.

设 x_0 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的"*S*"点，由 $f(x_0)=g(x_0)$ 且 $f'(x_0)=g'(x_0)$，得

$$\begin{cases} ax_0^2-1=\ln x_0 \\ 2ax_0=\dfrac{1}{x_0} \end{cases}$$，即 $\begin{cases} ax_0^2-1=\ln x_0 \\ 2ax_0^2=1 \end{cases}$，（*）

得 $\ln x_0=-\dfrac{1}{2}$，即 $x_0=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，则 $a=\dfrac{1}{2(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})^2}=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$．

当 $a=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$ 时，$x_0=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 满足方程组（*），即 x_0 为 *f*（*x*）与 *g*（*x*）的“*S*”点．

因此，*a* 的值为 $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$．

（3）对任意 *a*>0，设 $h(x)=x^3-3x^2-ax+a$．

因为 $h(0)=a>0$，$h(1)=1-3-a+a=-2<0$，且 *h*（*x*）的图象是不间断的，

所以存在 $x_0\in$（0，1），使得 $h(x_0)=0$，令 $b=\dfrac{2x_0^3}{\mathrm{e}^{x_0}(1-x_0)}$，则 *b*>0．

函数 $f(x)=-x^2+a$，$g(x)=\dfrac{b\mathrm{e}^x}{x}$，

则 $f'(x)=-2x$，$g'(x)=\dfrac{b\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$．

由 *f*（*x*）=*g*（*x*）且 *f*′（*x*）=*g*′（*x*），得

$$\begin{cases} -x^2+a=\dfrac{b\mathrm{e}^x}{x} \\ -2x=\dfrac{b\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2} \end{cases}$$，即 $$\begin{cases} -x^2+a=\dfrac{2x_0^3}{\mathrm{e}^{x_0}(1-x_0)}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \\ -2x=\dfrac{2x_0^3}{\mathrm{e}^{x_0}(1-x_0)}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2} \end{cases}$$（**）

此时，x_0 满足方程组（**），即 x_0 是函数 *f*（*x*）与 *g*（*x*）在区间（0，1）内的一个“*S* 点”．

因此，对任意 *a*>0，存在 *b*>0，使函数 *f*（*x*）与 *g*（*x*）在区间（0，+∞）内存在“*S* 点”．

20．本小题主要考查等差和等比数列的定义、通项公式、性质等基础知识，考查代数推理、转化与化归及综合运用数学知识探究与解决问题的能力．满分 16 分．

解：（1）由条件知：$a_n=(n-1)d, b_n=2^{n-1}$．

因为 $|a_n-b_n|\le b_1$ 对 *n*=1，2，3，4 均成立，

即 $|(n-1)d-2^{n-1}|\le 1$ 对 *n*=1，2，3，4 均成立，

即 1≤1，1≤*d*≤3，3≤2*d*≤5，7≤3*d*≤9，得 $\dfrac{7}{3}\le d\le\dfrac{5}{2}$．

因此，d 的取值范围为$[\frac{7}{3},\frac{5}{2}]$.

（2）由条件知：$a_n=b_1+(n-1)d, b_n=b_1q^{n-1}$.

若存在 d，使得$|a_n-b_n|\le b_1$（n=2，3，…，m+1）成立，

即 $|b_1+(n-1)d-b_1q^{n-1}|\le b_1(n=2,3,\cdots,m+1)$，

即当$n=2,3,\cdots,m+1$时，d 满足$\frac{q^{n-1}-2}{n-1}b_1\le d\le\frac{q^{n-1}}{n-1}b_1$.

因为$q\in(1,\sqrt[m]{2}]$，则$1<q^{n-1}\le q^m\le 2$，

从而$\frac{q^{n-1}-2}{n-1}b_1\le 0$，$\frac{q^{n-1}}{n-1}b_1>0$，对$n=2,3,\cdots,m+1$均成立.

因此，取 d=0 时，$|a_n-b_n|\le b_1$对$n=2,3,\cdots,m+1$均成立.

下面讨论数列$\{\frac{q^{n-1}-2}{n-1}\}$的最大值和数列$\{\frac{q^{n-1}}{n-1}\}$的最小值（$n=2,3,\cdots,m+1$）.

①当$2\le n\le m$时，$\frac{q^n-2}{n}-\frac{q^{n-1}-2}{n-1}=\frac{nq^n-q^n-nq^{n-1}+2}{n(n-1)}=\frac{n(q^n-q^{n-1})-q^n+2}{n(n-1)}$，

当$1<q\le 2^{\frac{1}{m}}$时，有$q^n\le q^m\le 2$，从而$n(q^n-q^{n-1})-q^n+2>0$.

因此，当$2\le n\le m+1$时，数列$\{\frac{q^{n-1}-2}{n-1}\}$单调递增，

故数列$\{\frac{q^{n-1}-2}{n-1}\}$的最大值为$\frac{q^m-2}{m}$.

②设$f(x)=2^x(1-x)$，当 x>0 时，$f'(x)=(\ln 2-1-x\ln 2)2^x<0$，

所以$f(x)$单调递减，从而$f(x)$<f（0）=1.

当$2\le n\le m$时，$\frac{\frac{q^n}{n}}{\frac{q^{n-1}}{n-1}}=\frac{q(n-1)}{n}\le 2^{\frac{1}{n}}(1-\frac{1}{n})=f(\frac{1}{n})<1$，

因此，当$2\le n\le m+1$时，数列$\{\frac{q^{n-1}}{n-1}\}$单调递减，

故数列$\{\frac{q^{n-1}}{n-1}\}$的最小值为$\frac{q^m}{m}$.

因此，d 的取值范围为$[\frac{b_1(q^m-2)}{m},\frac{b_1q^m}{m}]$.

数学Ⅱ(附加题)参考答案

21．【选做题】

A．[选修 4—1：几何证明选讲]

本小题主要考查圆与三角形等基础知识，考查推理论证能力．满分 10 分．

证明：连结 OC．因为 PC 与圆 O 相切，所以 $OC\perp PC$．

又因为 $PC=2\sqrt{3}$，$OC=2$，

所以 $OP=\sqrt{PC^2+OC^2}=4$．

又因为 $OB=2$，从而 B 为 Rt△OCP 斜边的中点，所以 $BC=2$．

B．[选修 4—2：矩阵与变换]

本小题主要考查矩阵的运算、线性变换等基础知识，考查运算求解能力．满分 10 分．

解：（1）因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，$\det(\boldsymbol{A})=2\times2-1\times3=1\neq0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，

从而 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$．

（2）设 $P(x，y)$，则 $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$，所以 $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$，

因此，点 P 的坐标为(3，−1)．

C．[选修 4—4：坐标系与参数方程]

本小题主要考查曲线的极坐标方程等基础知识，考查运算求解能力．满分 10 分．

解：因为曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$，

所以曲线 C 的圆心为（2，0），直径为 4 的圆．

因为直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)=2$，

则直线 l 过 A（4，0），倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$，

所以 A 为直线 l 与圆 C 的一个交点．

设另一个交点为 B，则 $\angle OAB=\frac{\pi}{6}$．

连结 OB，因为 OA 为直径，从而 $\angle OBA=\frac{\pi}{2}$，

所以 $AB=4\cos\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$．

因此，直线 l 被曲线 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$.

D．[选修 4—5：不等式选讲]

本小题主要考查柯西不等式等基础知识，考查推理论证能力．满分 10 分．

证明：由柯西不等式，得 $(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+2^2)\ge(x+2y+2z)^2$.

因为 $x+2y+2z=6$ ，所以 $x^2+y^2+z^2\ge4$ ，

当且仅当 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$ 时，不等式取等号，此时 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{4}{3}$，$z=\frac{4}{3}$，

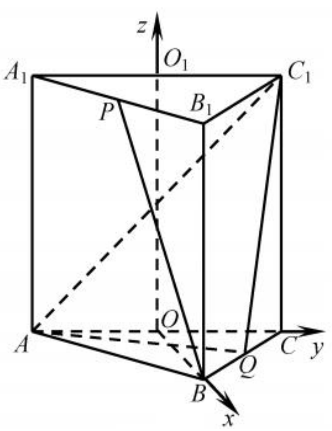
所以 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值为 4.

22．【必做题】**本小题主要考查空间向量、异面直线所成角和线面角等基础知识，考查运用空间向量解决问题的能力．满分 10 分．**

解：如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，设 AC，A_1C_1 的中点分别为 O，O_1，则 $OB\perp OC$，$OO_1\perp OC$，$OO_1\perp OB$，以 $\{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OO_1}\}$ 为基底，建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

因为 $AB=AA_1=2$，

所以 $A(0,-1,0),B(\sqrt{3},0,0),C(0,1,0),A_1(0,-1,2),B_1(\sqrt{3},0,2),C_1(0,1,2)$.



（1）因为 P 为 A_1B_1 的中点，所以 $P(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},2)$ ，

从而 $\overrightarrow{BP}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},2),\overrightarrow{AC_1}=(0,2,2)$ ，

故 $|\cos\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{AC_1}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC_1}|}{|\overrightarrow{BP}|\cdot|\overrightarrow{AC_1}|}=\frac{|-1+4|}{\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

因此，异面直线 BP 与 AC_1 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

（2）因为 Q 为 BC 的中点，所以 $Q(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0)$，

因此 $\overrightarrow{AQ}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(0,2,2),\overrightarrow{CC_1}=(0,0,2)$．

设 $\boldsymbol{n}$=（x，y，z）为平面 AQC_1 的一个法向量，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AQ}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y=0,\\ 2y+2z=0.\end{cases}$

不妨取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,1)$，

设直线 CC_1 与平面 AQC_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CC_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{CC_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CC_1}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{5}\times 2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以直线 CC_1 与平面 AQC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$．

23．【必做题】本小题主要考查计数原理、排列等基础知识，考查运算求解能力和推理论证能力．满分 10 分．

解：（1）记 $\tau(abc)$ 为排列 *abc* 的逆序数，对 1，2，3 的所有排列，有

$\tau(123)=0$，$\tau(132)=1$，$\tau(213)=1$，$\tau(231)=2$，$\tau(312)=2$，$\tau(321)=3$，

所以 $f_3(0)=1$，$f_3(1)=f_3(2)=2$．

对 1，2，3，4 的排列，利用已有的 1，2，3 的排列，将数字 4 添加进去，4 在新排列中的位置只能是最后三个位置.

因此，$f_4(2)=f_3(2)+f_3(1)+f_3(0)=5$．

（2）对一般的 *n*（*n*≥4）的情形，逆序数为 0 的排列只有一个：12…*n*，所以 $f_n(0)=1$．

逆序数为 1 的排列只能是将排列 12…*n* 中的任意相邻两个数字调换位置得到的排列，所以 $f_n(1)=n-1$．

为计算 $f_{n+1}(2)$，当 1，2，…，*n* 的排列及其逆序数确定后，将 *n*+1 添加进原排列，*n*+1 在新排列中的位置只能是最后三个位置.

因此，$f_{n+1}(2)=f_n(2)+f_n(1)+f_n(0)=f_n(2)+n$．

当 *n*≥5 时，

$$f_n(2)=[f_n(2)-f_{n-1}(2)]+[f_{n-1}(2)-f_{n-2}(2)]+\cdots+[f_5(2)-f_4(2)]+f_4(2)$$

$$=(n-1)+(n-2)+\ldots+4+f_4(2)=\frac{n^2-n-2}{2},$$

因此，n≥5 时，$f_n(2)=\dfrac{n^2-n-2}{2}$．