

中原名校 2019—2020 学年上期第五次质量考评

高三数学（理）参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1、A

解析： $A = \{x \in N \mid -1 \leq x \leq 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $B = \{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$ 则 $A \cap B = \{3, 4, 5\}$ 。

2、B

解析： $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，则 $z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ， $z^3 = 1$ ， $z^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，即周期为 3；

$$\text{则 } z^{2020} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

3、B

解析：④对

4、B

解析： $\frac{\sin 43^\circ - \cos 13^\circ \sin 30^\circ}{\sin 13^\circ} = \frac{\sin(13^\circ + 30^\circ) - \cos 13^\circ \sin 30^\circ}{\sin 13^\circ} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5、A

解析： $a_{11} = \frac{1}{3}a_6 = \frac{1}{9}a_1 = \frac{4}{9}$

6、C

解析：因为 $2\sqrt{(x+2)y} \leq x+2+y=10$ ，即 $(x+2)y$ 的最大值为 25

7、D

解析： $(x-2)^2 + y^2$ 表示可行域内任意一点到点 $(2,0)$ 的距离的平方最小值，根据数形结合

可行域内点 $(1,0)$ 到点 $(2,0)$ 的距离的平方最小且最小值为 1

8、B

解析：因为 $BC \parallel$ 面 AB_1C_1 ，所以线段 PQ 的最小值为点 B 到面 AB_1C_1 的距离，

又 $V_{B-AB_1C_1} = V_{A-BB_1C_1}$ ，则 $\frac{1}{3}S_{\triangle AB_1C_1} \times d = \frac{1}{3}S_{\triangle BB_1C_1} \times AD$ （ D 为 BC 中点）

计算得 $d = \frac{15\sqrt{381}}{127}$

9、A

解析: $g(x) = \sin[2(x + \frac{\pi}{6}) + \varphi] = \sin(2x + \frac{\pi}{3} + \varphi)$ 为偶函数, 则 $\frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{k\pi}{2}, k \in Z$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$

10、A

解析: $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 所以 $x_1 + x_2 = -3$, $-\lg x_3 = \lg x_4$, 则 $x_3 x_4 = 1$, 即

$$x_1 + x_2 + x_3 x_4 = -2$$

11、D

解析: 由题得: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in Z)$ 则 $\frac{2k\pi}{\omega} - \frac{3\pi}{4\omega} \leq x \leq \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{4\omega}$,
即 $\begin{cases} \frac{2k\pi}{\omega} - \frac{3\pi}{4\omega} < 0 \\ \frac{2k\pi}{\omega} + \frac{\pi}{4\omega} \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 则 $0 < \omega \leq \frac{1}{2}$

12、B

解析: 由题得 $f(x) - 3x + \sin x = f(-x) + 3x - \sin x$, 令 $g(x) = f(x) - 3x + \sin x = g(-x)$

则 $g(x)$ 为偶函数, $x \geq 0$ 时, $f'(x) \geq 3 - \cos x$, 即 $g'(x) \geq 0$, 则 $g(x)$ 递增;

由 $f(x) \geq f(\frac{\pi}{2} - x) - \frac{3\pi}{2} + 6x + \sqrt{2} \cos(x + \frac{\pi}{4})$ 得

$$f(x) - 3x + \sin x \geq f(\frac{\pi}{2} - x) - 3(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(\frac{\pi}{2} - x), \text{ 即 } g(x) \geq g(\frac{\pi}{2} - x)$$

则 $|x| \geq |\frac{\pi}{2} - x|$, 所以 $x \geq \frac{\pi}{4}$

二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13、 $\frac{\pi}{4}$

解析: 令 $y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$, 则 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, 即为四分之一圆的面积.

专注名校多元录取

14、 $[9, +\infty)$

解析：令 $n=1$ 则 $f(m) = f(m) - f(1)$ ，则 $f(1) = 0$ ，令 $m=1, n=3$ ，则

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = f(1) - f(3) = -1, \text{ 令 } m=3, n=\frac{1}{3}, \text{ 则 } f(9) = f(3) - f\left(\frac{1}{3}\right) = 2, \text{ 又 } f(x) \text{ 在 } (0, +\infty)$$

上的递增，则 $f(x) \geq 2$ 的解集为 $[9, +\infty)$

15、2

解析：因为 $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \perp (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$ ，则 $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = 0$ ，即 $(\vec{a} + \vec{c})^2 - |\vec{b}|^2 = 0$ ，

则 $|\vec{c}|^2 + 2|\vec{c}|\cos\theta = 0$ ，即 $|\vec{c}| = 0$ 或 $-2\cos\theta$ ，所以 $|\vec{c}|$ 的最大值为 2.

16、 $(-\infty, -\ln 4]$

解析： $f'(x) = -2mx - n + \frac{1}{2x}$ ， $f'(1) = 0$ ，则 $2n = 1 - 4m$ ，

则 $\ln m + 2n = \ln m - 4m + 1$ ，令 $g(m) = \ln m - 4m + 1$ ， $g'(m) = \frac{1-4m}{m}$ ，

则 $m \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ 时， $g(m)$ 递增， $m \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$ 时， $g(m)$ 递减，即 $g(m) \leq -\ln 4$

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17、(1) 当 $m=1$ 时， $f(x) = |x+1|$ ，即 $|x+1| + |x-2| \geq 6$

当 $x \leq -1$ 时， $-x-1-x+2 \geq 6$ ，解得 $x \leq -\frac{5}{2}$ 2 分

当 $-1 < x < 2$ 时， $x+1-x+2 \geq 6$ ，无解.....3 分

当 $x \geq 2$ 时， $x+1+x-2 \geq 6$ ，解得 $x \geq \frac{7}{2}$ 4 分

综上： $x \in (-\infty, -\frac{5}{2}] \cup [\frac{7}{2}, +\infty)$ 5 分

(2) $f(x) \leq 3$ ，即 $|x+m| \leq 3$ ，

则 $-3 \leq x+m \leq 3$ ，即 $-3-m \leq x \leq 3-m$

则 $\begin{cases} m \geq -x-3 \\ m \leq 3-x \end{cases}$ 在 $[1, 3]$ 上恒成立，.....8 分

所以 $m \in [-4, 0]$ 10 分

18、(1) 由 $S_n = 3n^2 - 2n$ 得 $S_{n-1} = 3(n-1)^2 - 2(n-1)$ ($n \geq 2$) ...1 分

联立得 $a_n = 6n - 5$ 4 分

当 $n = 1$ 成立

则 $a_n = 6n - 5$ 6 分

(2) 由 (1) 知 $b_n = \frac{6n-5}{2^n}$

$$T_n = \frac{1}{2^1} + \frac{7}{2^2} + \cdots + \frac{6n-5}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \cdots + \frac{6n-5}{2^{n+1}} \quad \text{.....9 分}$$

$$T_n = 7 - \frac{6n+7}{2^n} \quad \text{.....12 分}$$

19、(1) $f(x) = \cos^2 \omega x + \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x - 1$, 则 $f(x) = \frac{1}{2} \cos 2\omega x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x - \frac{1}{2}$

即 $f(x) = \sin(2\omega x + \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}$ 2 分

又 $g(x)$ 的图像上的最高点与相邻最低点的距离为 $\frac{\sqrt{16+\pi^2}}{2}$, 则 $\frac{16+\pi^2}{4} = (\frac{\pi}{2\omega})^2 + 4$

即 $\omega = 1$, 则 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2}$ 6 分

(2) 因为 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in Z$), 则 $k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6}$

当 $k = 0$ 时, $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$,8 分

当 $k = 1$ 时, $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$,9 分

当 $k = 2$ 时, $\frac{5\pi}{3} \leq x \leq \frac{13\pi}{6}$,10 分

所以 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的单调增区间为 $[0, \frac{\pi}{6}]$, $[\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}]$, $[\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$ 12 分

20、(1) 以点 D 为 $(0,0,0)$, DA 为 x 正半轴, DC 为 y 正半轴, DD_1 为 z 正半轴

令棱长为 3 所以 $D_1(0,0,3)$, $A(3,0,0)$, $B(3,3,0)$, $C(0,3,0)$

高三数学 (理) 参考答案 第 4 页 (共 7 页)

$E(0,2,1)$, $F(3,2,0)$ 2 分

则 $\overrightarrow{EF} = (3,0,-1)$, $\overrightarrow{DC} = (0,1,0)$ 为平面 ADD_1A_1 的法向量,4 分

$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$ 4 分

则 $EF \parallel$ 平面 ADD_1A_1 6 分

(2) 设 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1) \perp$ 平面 EFC

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{FC} = 0 \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 3 \\ z_1 = 3 \end{cases}, \quad \vec{n}_1 = (1, 3, 3) \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2) \perp$ 平面 EFD

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{FD} = 0 \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 3 \\ z_2 = -6 \end{cases}, \quad \vec{n}_2 = (-2, 3, -6) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

设二面角 $D-EF-C$ 为 θ , $\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{-11}{7\sqrt{19}}$

则 $\sin \theta = \frac{9\sqrt{190}}{133}$ 12 分

21、(1) 由题得 $a = 4$, 因为 $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$, 所以 $c = \sqrt{7}$, 即 $b = 3$

即椭圆方程 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 4 分

(2) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$

设 $L: y = k(x-3)$, 与 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 联立得

$$(16k^2 + 9)x^2 - 96k^2x + 144k^2 - 144 = 0$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{96k^2}{16k^2 + 9}, \quad x_1 x_2 = \frac{144k^2 - 144}{16k^2 + 9} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \overrightarrow{QM} = \lambda \overrightarrow{MP} \text{ 得 } \lambda = \frac{x_1}{3 - x_1}, \text{ 同理得 } \mu = \frac{x_2}{3 - x_2}$$

$$\lambda + \mu = \frac{x_1}{3 - x_1} + \frac{x_2}{3 - x_2} = \frac{3(x_1 + x_2) - 2x_1 x_2}{x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9} = \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\frac{288k^2 - 2(144k^2 - 144)}{144k^2 - 144 - 288k^2 + 9(16k^2 + 9)} = -\frac{32}{7} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22、(1) 由题得 $a = 1$ 时, 则 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2\ln x$

$$f'(x) = x - 3 + \frac{2}{x} = \frac{(x-1)(x-2)}{x}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 递增;

当 $x \in (1, 2)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 递减;

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 递增;

综上 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0, 1), (2, +\infty) \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$$(2) f'(x) = ax - (2a + 1) + \frac{2}{x} = \frac{(x-2)(ax-1)}{x} (x \geq 2)$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 递减, 则 $f(x) \leq f(2)$,

即 $-2a - 2 + 2\ln 2 \leq 0$, 则 $\ln 2 - 1 \leq a \leq 0$, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{a} > 2$,

当 $x \in \left(2, \frac{1}{a}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 递减;

当 $x \in \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 递增; $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

又 $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$ 与题意矛盾

当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 递增, 又 $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$ 与题意矛盾

综上所述: $\ln 2 - 1 \leq a \leq 0$ 12 分

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国重点中学 2020 届高三上学期期末考试试题答案汇总（更新下载中），点击链接获得

<http://www.zizzs.com/c/202001/41635.html>