2023—2024 学年高中毕业班阶段性测试（一）

理科数学答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1.B　2.D　3.A　4.C　5.B　6.A

7.B　8.C　9.B　10.C　11.D　12.D

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.4　14.54

15.5　16. $(\ln 3,+\infty)$

四、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（1）在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AC}{\sin D}$，即 $\dfrac{3}{\sin\angle CAD}=\dfrac{4}{\sin 60^\circ}$，

所以 $\sin\angle CAD=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

由题设知 $\angle CAD<90^\circ$，所以 $\cos\angle CAD=\sqrt{1-\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{37}}{8}$.

（2）由题设及（1）知，$\cos\angle BAC=\sin\angle CAD=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\angle BAC=\frac{75}{4}+16-2\times\frac{5\sqrt{3}}{2}\times 4\times\frac{3\sqrt{3}}{8}=\frac{49}{4},$$

所以 $BC=\dfrac{7}{2}$.

18.（1）在 $\triangle ABC$ 中，因为 E，F 分别是 BC，AC 的中点，
所以 $AB\,//\,EF$.

因为 $AC\,//\,A_1C_1$，$AF=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}A_1C_1=DC_1$，

所以四边形 AFC_1D 为平行四边形，

所以 $AD\,//\,FC_1$，

又因为 $AD\cap AB=A$，$FE\cap FC_1=F$，

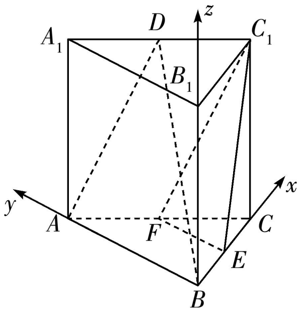
所以 $ABD\,//$ 平面 FEC_1.

（2）因为 $AC=2$，$CB=1$，$\angle ACB=60^\circ$，

由余弦定理可得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB=3$，

所以 $AB^2+BC^2=AC^2$，从而 $AB\perp BC$.

以 B 为坐标原点 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BB_1}$ 的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 B-xyz.



故 $B(0,0,0)$，$A\left(0,\sqrt{3},0\right)$，$D\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\right)$，$C(1,0,0)$.

从而 $\overrightarrow{BA}=\left(0,\sqrt{3},0\right)$，$\overrightarrow{BD}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},2\right)$，$\overrightarrow{AC}=\left(1,-\sqrt{3},0\right)$.

设平面 ABD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}\sqrt{3}y=0\\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y+2z=0\end{cases}$，

取 $x=4$，则 $\vec{n}=(4,0,-1)$ 为平面 ABD 的一个法向量，

所以 $\cos<\vec{n},\overrightarrow{AC}>=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{4}{\sqrt{17}\times 2}=\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$，

所以直线 AC 与平面 ABD 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$.

19.（1）由 $F(2,0)$ 得 C 的半焦距为 $c=2$，

所以 $a^2=b^2+4$，

又 C 过点 $(2,3)$，

所以 $\dfrac{4}{b^2+4}+\dfrac{9}{b^2}=1$，解得 $b^2=12$，

所以 $a^2=16$，$a=4$.

故 C 的离心率为 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$.

（2）由（1）可知 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.设 $M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，$P\left(8,y_0\right)$.

由题意可得直线 MN 的方程为 $y=x-2$，公众号：全元高考

联立 $\begin{cases} y=x-2 \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1 \end{cases}$，消去 y 可得 $7x^2-16x-32=0$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{16}{7}$，$x_1x_2=-\dfrac{32}{7}$，

则 $k_{PM}+k_{PN}=\dfrac{y_0-y_1}{8-x_1}+\dfrac{y_0-y_2}{8-x_2}=\dfrac{\left(y_0-x_1+2\right)\left(8-x_2\right)+\left(y_0-x_2+2\right)\left(8-x_1\right)}{\left(8-x_1\right)\left(8-x_2\right)}$

$=\dfrac{16y_0+32+2x_1x_2-\left(y_0+10\right)\left(x_1+x_2\right)}{64+x_1x_2-8\left(x_1+x_2\right)}$

$=\dfrac{16y_0+32+2\left(-\dfrac{32}{7}\right)-\dfrac{16}{7}\left(y_0+10\right)}{64-\dfrac{32}{7}-8\times\dfrac{16}{7}}$

$=\dfrac{y_0}{3}$，

又 $k_{PF}=\dfrac{y_0-0}{8-2}=\dfrac{y_0}{6}$，

因此 $k_{PM}+k_{PN}=2k_{PF}$.

20.（1）由题意知 $f\left(p\right)=3p^2\left(1-p\right)$，$0<p<1$，

则 $f'\left(p\right)=-9p^2+6p=3p\left(2-3p\right)$，

当 $0<p<\dfrac{2}{3}$ 时，$f'\left(p\right)>0$，当 $\dfrac{2}{3}<p<1$ 时，$f'\left(p\right)<0$，

所以当 $p=\dfrac{2}{3}$ 时，$f\left(p\right)$ 取最大值，即 $p_0=\dfrac{2}{3}$.

（2）（i）小李第一次考试 3 个科目都合格的概率为 $P_1=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，

小李第一次考试有 2 个科目合格，补考 1 个科目且合格的概率为 $P_2=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$，

小李第一次考试有 1 个科目合格，补考 2 个科目且均合格的概率为 $P_3=3\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{81}$，

所以小李这项资格考试过关的概率为 $P=P_1+P_2+P_3=\frac{56}{81}$.

（ii）X 的所有可能取值为 60，80，100，

则 $P(X=60)=\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{3}$， $P(X=80)=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$，

$P(X=100)=3\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$，

故 $E(X)=60\times\frac{1}{3}+80\times\frac{4}{9}+100\times\frac{2}{9}=\frac{700}{9}$.

21.（1）当 $x\in(0,\pi)$ 时， $\sin x>0$，所以由 $\frac{me^x}{\sin x}\geqslant 1$，可得 $m\geqslant\frac{\sin x}{e^x}$.

令 $g(x)=\frac{\sin x}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$，

令 $g'(x)=0$，则 $\sin x=\cos x$，而 $x\in(0,\pi)$，得 $x=\frac{\pi}{4}$.

故当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时， $g'(x)>0$，

当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$ 时， $g'(x)<0$，

故 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$ 上单调递减，

故 $[g(x)]_{\max}=g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$，

所以 m 的取值范围为 $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}},+\infty\right)$.

（2）易知 $f\left(x\right)\neq 0$，所以 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，等价于 $\dfrac{1}{f\left(x_1\right)}=\dfrac{1}{f\left(x_2\right)}$，等价于 $g\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$.

不妨设 $x_1<x_2$，由（1）可知 $0<x_1<\dfrac{\pi}{4}<x_2$.

要证 $x_1+x_2>\dfrac{\pi}{2}$，即证 $x_2>\dfrac{\pi}{2}-x_1>\dfrac{\pi}{4}$，又因为 $g\left(x\right)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$ 上单调递减，所以需证 $g\left(x_2\right)<g\left(\dfrac{\pi}{2}-x_1\right)$，

即 $g\left(x_1\right)<g\left(\dfrac{\pi}{2}-x_1\right)$.

令 $h\left(x\right)=g\left(x\right)-g\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$，

则 $h'\left(x\right)=g'\left(x\right)+g'\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\dfrac{\cos x-\sin x}{e^x}+\dfrac{\sin x-\cos x}{e^{\frac{\pi}{2}-x}}$

$=\left(\cos x-\sin x\right)\left(\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{1}{e^{\frac{\pi}{2}-x}}\right)$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 时，$\cos x-\sin x>0$，$\dfrac{1}{e^x}>\dfrac{1}{e^{\frac{\pi}{2}-x}}$，

所以 $h'\left(x\right)>0$，则 $h\left(x\right)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，所以 $h\left(x_1\right)<h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$，即 $g\left(x_1\right)<g\left(\dfrac{\pi}{2}-x_1\right)$，

因此，$x_1+x_2>\dfrac{\pi}{2}$.

22.解析（1）由曲线 C 的参数方程消去参数 α，得普通方程为 $(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=6$.

因为 $\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，所以 $\dfrac{\sqrt{3}\rho\sin\theta}{2}-\dfrac{\rho\cos\theta}{2}=1$，将 $\rho\cos\theta=x,\rho\sin\theta=y$ 代入得 $\sqrt{3}y-x=2$.

（2）由于直线 l 与 x 轴的交点坐标为 $\left(-2,0\right)$，倾斜角为 $\dfrac{\pi}{6}$，

所以直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y=\dfrac{1}{2}t \end{cases}$ （t 为参数），

代入 $(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=6$，得 $t^2-4\sqrt{3}t+6=0$，

设 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=4\sqrt{3},t_1t_2=6$，

所以 $|PA|^2+|PB|^2=t_1^2+t_2^2=\left(t_1+t_2\right)^2-2t_1t_2=36$.

23.解析（1）由 $f\left(x\right)+2\quad g\left(x\right)$，可得 $2\left|x+1\right|+2\quad 4+\left|2x-1\right|$，

当 $x\quad \dfrac{1}{2}$ 时，原不等式可化为 $2\left(x+1\right)+2\quad 4+\left(2x-1\right)$，化简得 $4\quad 3$，不成立；

当 $-1<x<\dfrac{1}{2}$ 时，原不等式可化为 $2\left(x+1\right)+2\quad 4-\left(2x-1\right)$，解得 $x\quad \dfrac{1}{4}$，故 $-1<x\quad \dfrac{1}{4}$；

当 $x\quad -1$ 时，原不等式可化为 $-2\left(x+1\right)+2\quad 4-\left(2x-1\right)$，化简得 $0\quad 5$，恒成立，故 $x\quad -1$.

综上可知 x 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right]$.

（2）因为 $f\left(x\right)+g\left(x\right)=\left|2x+2\right|+4+\left|2x-1\right|\quad \left|2x+2-\left(2x-1\right)\right|+4=7$，

由题可知关于 x 的不等式 $f\left(x\right)+g\left(x\right)\quad 2a^2-13a$ 的解集为 $\mathbf{R}$，所以 $7\quad 2a^2-13a$，

解得 $-\dfrac{1}{2}\quad a\quad 7$.

故实数 a 的取值范围是 $\left[-\dfrac{1}{2},7\right]$.