

2022—2023 学年度第二学期期末教学质量抽测

高二数学试题

注意事项:

1. 本试卷满分 150 分,考试用时 120 分钟。答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡的相应位置上。

2. 回答选择题时,选出每小题的答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,只将答题卡交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$, $\complement_U A=\{1,2,4\}$, $\complement_U B=\{3,4,5\}$, 则 $A \cup B=$

- A. $\{1,2,5,6\}$ B. $\{4,6\}$ C. $\{1,2,3,6\}$ D. $\{1,2,3,5,6\}$

2. 若 X 为离散型随机变量,则“ $D(aX+b)=4D(X)$ ”是“ $a=2$ ”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 今年 2 月份教育部教育考试院给即将使用新高考卷的吉林、黑龙江、安徽、云南命制了一套四省联考卷,测试的目的是教考衔接,平稳过渡。假如某市有 40 000 名考生参加了这次考试,其数学成绩 X 服从正态分布,总体密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, 且 $P(40 \leq X \leq 90)=0.9$, 则该市这次考试数学成绩超过 90 分的考生人数约为

- A. 4 000 B. 3 000 C. 2 000 D. 1 000

4. 设 $a=\log_2 3$, $b=\log_3 2$, $c=\frac{1}{2}\log_2 5$, 则 a, b, c 的大小顺序为

- A. $a > c > b$ B. $c > a > b$ C. $b > c > a$ D. $b > a > c$

5. 若函数 $f(x)=x^3-ax^2+ax+3$ 存在极值点, 则 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ B. $(0, 3)$
C. $(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$ D. $[0, 3]$

6. 毕业季, 6 位身高全不相同的同学拍照留念, 站成前后两排各三人, 要求每列后排同学比前排高的不同排法共有

- A. 40 种 B. 20 种 C. 180 种 D. 90 种

7. 已知函数 $f(x)=2^x+x+1$, $g(x)=\log_2 x+x+1$, $h(x)=x^3+x+1$ 的零点分别为 a, b, c , 则

- A. $f(a) > f(b) > f(c)$ B. $f(b) > f(c) > f(a)$
C. $f(c) > f(a) > f(b)$ D. $f(b) > f(a) > f(c)$

高二数学试题第 1 页 (共 4 页)

8. 托马斯·贝叶斯(Thomas Bayes)在研究“逆向概率”的问题中得到了一个公式: $P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B|A_j)}$, 这个公式被称为贝叶斯公式(贝叶斯定理), 其中 $\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B|A_j)$ 称为 B 的全概率. 假设甲袋中有 3 个白球和 2 个红球, 乙袋中有 2 个白球和 2 个红球. 现从甲袋中任取 2 个球放入乙袋, 再从乙袋中任取 2 个球. 已知从乙袋中取出的是 2 个白球, 则从甲袋中取出的也是 2 个白球的概率为

- A. $\frac{37}{150}$ B. $\frac{9}{75}$ C. $\frac{18}{37}$ D. $\frac{1}{2}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 2023 年 5 月 30 日, 搭载神舟十六号载人飞船的长征二号 F 遥十六运载火箭在酒泉卫星发射中心发射升空, 航天员乘组状态良好, 发射取得圆满成功. 某学校调查学生对神舟十六号的关注与性别是否有关, 随机抽样调查了 1 000 名学生, 进行独立性检验, 计算得到 $\chi^2 \approx 7.936$, 依据表中给出的 χ^2 独立性检验中的小概率值和相应的临界值, 作出下列判断, 正确的是

α	0.050	0.010	0.005	0.001
x_α	3.841	6.635	7.879	10.828

- A. 零假设 H_0 : 对神舟十六号的关注与性别独立
 B. 根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验, 可以认为对神舟十六号的关注与性别无关
 C. 根据小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验, 可以认为对神舟十六号的关注与性别不独立, 此推断犯错误的概率不大于 0.005
 D. 根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验, 可以认为对神舟十六号的关注与性别独立
10. 一箱儿童玩具中有 3 件正品, 2 件次品, 现从中不放回地任取 2 件进行检测. 记随机变量 X 为检测到的正品的件数, 则
- A. X 服从二项分布 B. $P(X \geq 1) = \frac{9}{10}$
 C. $E(X) = \frac{6}{5}$ D. 最有可能取得的 X 为 1
11. 若 $\bar{A}, \bar{B}$ 分别为随机事件 A, B 的对立事件, $P(A) > 0, P(B) > 0$, 则下列结论正确的是
- A. $P(B|A) + P(B|\bar{A}) = 1$ B. $P(\bar{A}|B)P(B) = P(B|\bar{A})P(\bar{A})$
 C. $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = P(B)$ D. 若 $P(A|B) = P(A)$, 则 $P(B|A) = P(B)$
12. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增, 且其图象关于点 (a, b) 中心对称, 则下列结论正确的是
- A. $f(2a+x) = b - f(-x)$ B. 若 $f(x_1) + f(x_2) > 2b$, 则 $x_1 + x_2 > 2a$
 C. $f'(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 轴对称 D. 若 $f'(x_1) > f'(x_2)$, 则 $|x_1 - a| > |x_2 - a|$

高二数学试题第 2 页 (共 4 页)

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 能够说明“若 a, b, m 均为正数,则 $\frac{b+m}{a+m} < \frac{b}{a}$ ”是真命题的一组数 a, b 可以为 $a = \underline{\hspace{2cm}}$,
 $b = \underline{\hspace{2cm}}$. (写出一组即可)

14. 已知随机变量 X 服从两点分布,且 $P(X=0)=2a^2, P(X=1)=a$,那么 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知 abc 表示一个三位数,如果满足 $a < b$ 且 $b > c$,那么我们称该三位数为“凸数”,则没有重复数字的三位“凸数”的个数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 已知定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 的函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,且对定义域内任意的 a, b 都满足 $f(ab) = f(a) + f(b) - 1$. 若存在 $x \in (1, +\infty)$, 使不等式 $f(mx) - f(\ln x) > f(-1) - 1$ 成立,则实数 m 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

病毒感染是指病毒通过多种途径侵入机体,并在易感的宿主细胞中增殖的过程. 如果一个宿主感染了病毒并且在刚出现不良反应时就对症下药,在用药 x 小时后病毒的数量

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 10x + 5, & 0 \leq x \leq 5, \\ -2x + 40, & 5 < x \leq 20. \end{cases} \quad (\text{细菌个数的单位:百个})$$

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 点在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 求细菌数量超过 14(百个)的时间段.

18. (12 分)

已知 $f(x) = a^x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$.

(1) 判断函数 $h(x) = f(x) - f(-x)$ 的奇偶性和单调性,并给出证明;

(2) 求函数 $g(x) = f(x) + f(-x)$ 的值域.

19. (12 分)

已知 $(3x-1)^n$ 的展开式中第 4 项和第 6 项的二项式系数相等.

(1) 求 x^3 项的系数;

(2) 若 $(3x-1)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, 求 $2^na_0 + 2^{n-1}a_1 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$ 的值.

高二数学试题第 3 页 (共 4 页)

20. (12 分)

天气越来越热,某冷饮店统计了近六天每天的用电量和对应的销售额,目的是了解二者之间的关系,数据如下表:

用电量 x (千瓦时)	4	7	8	9	14	12
销售额 y (百元)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6

(1)该冷饮店做了一次摸奖促销活动,在一个口袋里放有大小、质地完全相同的 6 个红色雪花片和 4 个白色雪花片.若有放回地从口袋中每次摸取 1 个雪花片,连续摸两次,两次摸到的雪花片颜色不同定为一等奖,两次摸到的雪花片颜色相同定为二等奖,试比较中一等奖和中二等奖的概率的大小;



(2)已知两个变量 x 与 y 之间的样本相关系数 $r = \frac{8}{9}$,请用最小二乘法求

出 y 关于 x 的经验回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$,据此能否预测明年同时期用电量为 15 千瓦时的销售额?如果能,计算出结果;如果不能,请说出理由.

$$\text{参考公式: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}.$$

相关数据: $\sum_{i=1}^6 y_i^2 = 2724$, $\sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2 = 324$.

21. (12 分)

甲、乙两位同学进行乒乓球单打比赛,约定:①每赢一球得 1 分;②采用三球换发制,即每比赛三球交换发球权.假设甲发球时甲得分的概率是 $\frac{3}{5}$,乙发球时甲得分的概率是 $\frac{1}{2}$,各球的结果相互独立.根据抽签结果决定,甲先发球.

(1)用 X 表示比赛三球后甲的得分,求 X 的分布列和均值;

(2)求比赛六球后甲比乙的得分多的概率.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = -2\ln x - \frac{a}{x^2} + 1$.

(1)当 $a=1$ 时,求 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上的最值;

(2)若 $f(x)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 ,求 a 的取值范围,并证明: $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > \frac{2}{a}$.

2022—2023 学年度第二学期期末教学质量抽测

高二数学答案及评分标准

一、选择题

1~4. DBCA 5~8. ADBC

二、选择题

9. ACD 10. BCD 11. BD 12. BC

三、填空题

13. 1, 2 (只要满足 $0 < a < b$ 即可) 14. $\frac{1}{2}$ 15. 204 16. $(-\frac{1}{e}, 0) \cup (0, \frac{1}{e})$

四、解答题

17. 解: (1) 当 $0 \leq x \leq 5$ 时, $f(x) = -x^2 + 10x + 5$, $f(1) = -1 + 10 + 5 = 14$,
 $f'(x) = -2x + 10$, $f'(1) = -2 + 10 = 8$ 3 分
 故曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 14 = 8(x - 1)$, 即 $8x - y + 6 = 0$ 5 分
 (2) 当 $0 \leq x \leq 5$ 时, 由 $-x^2 + 10x + 5 > 14$, 解得 $1 < x < 9$, 所以 $1 < x \leq 5$; 7 分
 当 $5 < x \leq 20$ 时, 由 $-2x + 40 > 14$, 解得 $5 < x < 13$, 8 分
 综上所述 $1 < x < 13$, 即细菌数量超过 14 百个的时间段是 $(1, 13)$ 10 分
18. 解: (1) $h(x) = f(x) - f(-x) = a^x - a^{-x}$,
 因为 $h(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $h(-x) = f(-x) - f(x) = a^{-x} - a^x = -h(x)$,
 所以 $h(x)$ 为奇函数. 3 分
 (方法一) 设 $x_1 < x_2$, $h(x_1) - h(x_2) = a^{x_1} - a^{-x_1} - (a^{x_2} - a^{-x_2}) = (a^{x_1} + a^{-x_2}) - (a^{x_2} + a^{-x_1})$...
 4 分
 当 $a > 1$ 时, 因为 $a^{x_1} < a^{x_2}$, $a^{-x_2} < a^{-x_1}$, $a^{x_1} + a^{-x_2} < a^{x_2} + a^{-x_1}$, 所以 $h(x_1) - h(x_2) < 0$,
 故 $h(x)$ 为增函数; 5 分
 当 $0 < a < 1$ 时, 因为 $a^{x_1} > a^{x_2}$, $a^{-x_2} > a^{-x_1}$, $a^{x_1} + a^{-x_2} > a^{x_2} + a^{-x_1}$, 所以 $h(x_1) - h(x_2) > 0$,
 故 $h(x)$ 为减函数. 6 分
 综上, 当 $a > 1$ 时, $h(x)$ 为增函数; 当 $0 < a < 1$ 时, $h(x)$ 为减函数. 7 分
 (方法二) $h'(x) = a^x \ln a + a^{-x} \ln a = (a^x + a^{-x}) \ln a$, 4 分
 当 $a > 1$ 时, 因为 $\ln a > 0$, 又 $a^x + a^{-x} > 0$, 所以 $h'(x) > 0$, 故 $h(x)$ 为增函数; 5 分
 当 $0 < a < 1$ 时, 因为 $\ln a < 0$, 又 $a^x + a^{-x} > 0$, 所以 $h'(x) < 0$, 故 $h(x)$ 为减函数. 6 分
 综上, 当 $a > 1$ 时, $h(x)$ 为增函数; 当 $0 < a < 1$ 时, $h(x)$ 为减函数. 7 分
 (2) $g(x) = f(x) + f(-x) = a^x + a^{-x}$.
 因为 $a^x > 0$, 所以 $a^x + a^{-x} \geq 2\sqrt{a^x \cdot a^{-x}} = 2$ (当且仅当 $x = 0$ 时取等号), 10 分
 又 $x \rightarrow +\infty$ 时, $a^x + a^{-x} \rightarrow +\infty$, 11 分
 所以 $g(x)$ 的值域为 $[2, +\infty)$ 12 分

高二数学参考答案第 1 页 (共 4 页)

19. 解: (1) 因为展开式中第 4 项和第 6 项的二项式系数相等, 所以 $C_n^3 = C_n^5$, 解得 $n=8$ 2 分
所以 $(3x-1)^8$ 的展开式的通项公式为 $T_{k+1} = C_8^k (3x)^{8-k} (-1)^k, k=0, 1, \dots, 8$ 4 分
令 $8-k=2$, 则 $k=6$, ... 5 分
所以 x^2 项的系数为 $C_8^6 \cdot 3^2 \cdot (-1)^6 = 252$ 7 分
(2) 由 (1) 知, $n=8$. 由 $(3x-1)^8 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_8x^8$,
令 $x = \frac{1}{2}$, 得 $(3 \times \frac{1}{2} - 1)^8 = \frac{1}{2^8} = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_8}{2^8}$, ... 10 分
所以 $2^8 a_0 + 2^7 a_1 + \dots + 2a_7 + a_8 = 1$ 12 分
20. 解: (1) 两次摸到的雪花片颜色不同的概率为 $P_1 = \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} \times 2 = \frac{12}{25}$, ... 2 分
两次摸到的雪花片颜色相同的概率为 $P_2 = \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{13}{25}$, ... 4 分
显然 $P_1 < P_2$, 所以中二等奖的概率大. ... 5 分
(2) 依题意可得 $\bar{x} = \frac{4+7+8+9+14+12}{6} = 9$, ... 6 分
所以 $\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = (4-9)^2 + (7-9)^2 + (8-9)^2 + (9-9)^2 + (14-9)^2 + (12-9)^2 = 64$,
... 7 分
由于 $r = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{8 \times 18} = \frac{8}{9}$,
所以 $\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 16 \times 8 = 128$, ... 8 分
所以 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{128}{64} = 2$, ... 9 分
因为 $\sum_{i=1}^6 y_i^2 = 2724$, $\sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^6 y_i^2 - 2\bar{y} \cdot \sum_{i=1}^6 y_i + 6\bar{y}^2 = \sum_{i=1}^6 y_i^2 - 6\bar{y}^2 = 324$, 所以 $\bar{y} = 20$.
... 10 分
所以 $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 20 - 2 \times 9 = 2, \hat{y} = 2x + 2$ 11 分
因为经验回归方程有时效性, 即冷饮受温度影响较大, 明年的这个时期的温度不一定和现在相同, 故不能用今年求出的经验回归方程估算明年的情况. ... 12 分
21. 解: (1) X 的所有可能取值是 0, 1, 2, 3. ... 1 分
则 $P(X=0) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$,
 $P(X=1) = C_3^1 \times \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{36}{125}$.

高二数学参考答案第 2 页 (共 4 页)

$$P(X=2)=C_3^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{2}{5} = \frac{54}{125},$$

$$P(X=3)=\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

5 分

$$X \text{ 的均值 } E(X)=0 \times \frac{8}{125} + 1 \times \frac{36}{125} + 2 \times \frac{54}{125} + 3 \times \frac{27}{125} = \frac{9}{5}.$$

(或因为 $X \sim B\left(3, \frac{3}{5}\right)$, 所以 $E(X)=3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$.) 6 分

(2) 设 A = “比赛六球后甲比乙的得分多”, A_1 = “比赛六球后甲比乙的得分多 6 分”,
 A_2 = “比赛六球后甲比乙的得分多 4 分”, A_3 = “比赛六球后甲比乙的得分多 2 分”,
则 $A=A_1 \cup A_2 \cup A_3$, 且 A_1, A_2, A_3 两两互斥. 7 分

$$\text{因为 } P(A_1)=\left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{1000}, \text{ 8 分}$$

$$P(A_2)=C_3^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times C_3^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{135}{1000} = \frac{27}{200}, \text{ 9 分}$$

$$P(A_3)=\left(\frac{3}{5}\right)^3 \times C_3^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_3^2 \times \frac{3}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_3^1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{2}{5} \times C_3^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ = \frac{81}{1000} + \frac{36}{1000} + \frac{162}{1000} = \frac{279}{1000}, \text{ 11 分}$$

$$\text{所以 } P(A)=\frac{27}{1000} + \frac{27}{200} + \frac{279}{1000} = \frac{441}{1000}.$$

所以比赛六球后甲比乙的得分多的概率为 $\frac{441}{1000}$ 12 分

22. 解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x)=-2\ln x - \frac{1}{x^2} + 1, x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right],$

$$f'(x)=-\frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} = -2 \times \frac{(x+1)(x-1)}{x^3}. \text{ 1 分}$$

由 $f'(x)>0$, 得 $\frac{1}{2}<x<1$; 由 $f'(x)<0$, 得 $1<x<2$, 所以 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上单调递增, 在区间 $(1, 2)$ 上单调递减. 2 分

$$\text{因为 } f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\ln \frac{1}{2}-4+1=-3+2\ln 2, f(1)=-2\ln 1-1+1=0,$$

$$f(2)=-2\ln 2-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}-2\ln 2, \text{ 3 分}$$

高二数学参考答案第 3 页 (共 4 页)

$$f\left(\frac{1}{2}\right) - f(2) = 4\ln 2 - \frac{15}{4} = 4\left(\ln 2 - \frac{15}{16}\right) < 0,$$

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上的最大值为 0, 最小值为 $-3 + 2\ln 2$ 4 分

$$(2) f'(x) = -\frac{2x^2 - 2a}{x^3} (x > 0).$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 不可能有两个零点, 舍去; 5 分

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, 所以 } f'(x) = -\frac{2(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})}{x^3} (x > 0),$$

由 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < \sqrt{a}$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{a})$ 上单调递增;

由 $f'(x) < 0$, 得 $x > \sqrt{a}$, 所以 $f(x)$ 在 $(\sqrt{a}, +\infty)$ 上单调递减.

当 $x = \sqrt{a}$ 时, $f(x)$ 取得极大值, 极大值为 $f(\sqrt{a}) = -\ln a$ 6 分

为满足题意, 必有 $f(\sqrt{a}) = -\ln a > 0$, 得 $0 < a < 1$ 7 分

$$\text{又 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } f(x) = -2\ln x - \frac{a}{x^2} + 1 = \frac{-2x^2 \ln x - a}{x^2} + 1 \rightarrow -\infty,$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ 时, } f(x) = -2\ln x - \frac{a}{x^2} + 1 \rightarrow -\infty,$$

所以 a 的取值范围为 $(0, 1)$ 8 分

因为 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个不同的零点,

$$\text{所以 } f(x_1) = -2\ln x_1 - \frac{a}{x_1^2} + 1 = 0, f(x_2) = -2\ln x_2 - \frac{a}{x_2^2} + 1 = 0,$$

$$\text{两式相减得 } \frac{2}{a} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 x_2^2 \ln \frac{x_2}{x_1}}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{设 } x_2 > x_1 > 0, \text{ 要证 } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > \frac{2}{a},$$

$$\text{只需证 } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 x_2^2 \ln \frac{x_2}{x_1}}, \text{ 即证 } \ln \frac{x_2}{x_1} > \frac{\frac{x_2^2}{x_1^2} - 1}{\frac{x_2^2}{x_1^2} + 1}.$$

$$\text{设 } \frac{x_2}{x_1} = t \in (1, +\infty), \text{ 只需证 } \ln t > \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} (t > 1), \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{设 } g(t) = \ln t - \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} (t > 1), \text{ 则 } g'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} = \frac{(t^2 - 1)^2}{t(t^2 + 1)^2} > 0,$$

$\therefore g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数, 从而 $g(t) > g(1) = 0$,

$$\text{所以 } \ln t > \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} (t > 1) \text{ 成立, 从而 } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > \frac{2}{a}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。



微信搜一搜



齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索