1号卷·A10联盟2021年高考最后一卷

文科数学参考答案

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	A	D	B	C	A	B	D	B	D	C

1. C　由题意得，$A=\{x|x>1\}$，$\therefore A\cap B=\{x\in \mathbf{Z}|1<x\leqslant 3\}=\{2,3\}$. 故选 C.

2. D　由题意得，$\dfrac{1-6i}{3-2i}=\dfrac{(1-6i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{15-16i}{13}=\dfrac{15}{13}-\dfrac{16}{13}i$，则其在复平面内所对应的点为$\left(\dfrac{15}{13},-\dfrac{16}{13}\right)$，位于第四象限，故选 D.

3. A　$\because \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)=\sqrt{2}$，$\therefore -\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}$，即 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\sqrt{2}$，$\therefore(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=2$，$\therefore \sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=2$. 故选 A.

4. D　易知$f(x)=x+\ln|x|$是非奇非偶函数，所以排除选项 A，C. 当$x>0$时，$f(x)$单调递增，所以排除选项 B. 故选 D.

5. B　设数列$\{a_n\}$的公比为q，显然$q\neq 1$，$\because S_4=a_5-1$，$\therefore \dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=a_1q^4-1$，即 $\dfrac{q^4-1}{q-1}=q^4-1$，又$q>0$，$q\neq 1$，$\therefore q-1=1$，$\therefore q=2$，$\therefore a_6=a_1q^5=32$，故选 B.

6. C　由图（1）可知，2020 年下半年生产资料出厂价格环比涨幅先下降后上升，故①错误；由图（2）中的环比折线可知，生活资料出厂价格的环比涨跌幅后一个月与前一个月的差介于$-0.2\%\sim 0.4\%$之间，由于2021年1月环比的涨幅为0.2%，故可以预测在市场平稳的前提下，2021年2月生活资料出厂价格的环比可能为正数，故②正确；将2020年1月～2021年1月生产资料出厂价格的同比涨跌幅从小到大排列后，所得的中位数为-2.7%，故③错误. 故选 C.

7. A　作出不等式组表示的可行域，是以$A(0,1),B(1,1),C(1,2)$为顶点的三角形．令 $z'=\dfrac{x}{2}-y$，则$z'\in\left[-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right]$，故$z=\left(\dfrac{x}{2}-y\right)^2\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{9}{4}\right]$. 故选 A.

8. B　由题意得，MN的最小值为平面A_1BD到平面B_1CD_1的距离．$\because$正方体

$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 64，易得 $AC_1=4\sqrt{3}$，则 $MN_{\min}=\frac{1}{3}AC_1=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，故选 B.

9. D　令 $f(x)=t$，则 $f(t)<0$，解得 $-2<t<0$，即 $-2<f(x)<0$. 由 $f(x)=-2$ 得 $x=-1$ 或 $x=\frac{1}{e^2}-1$. 根据函数 $f(x)$ 的图象得，$f(f(x))<0$ 的解集为 $(-2,-1)\cup\left(\frac{1}{e^2}-1,0\right)$，故选 D.

10. B　易知圆 C' 过原点，设 $P(0,0)$，$Q(m,n)$，$m>0$，由 $|PQ|=\sqrt{5}$，可得 $m^2+n^2=5$，又 $m^2+n^2=\frac{5}{2}n$，联立可解得 $m=1$，$n=2$，将 $Q(1,2)$ 代入 $y^2=2px$ 中，解得 $p=2$，$\therefore$ 抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$，焦点 $F(1,0)$，准线 $l:x=-1$. 过 A,B 分别作 $AA_1\perp l$ 于 A_1，$BB_1\perp l$ 于 B_1，可得 $|AF|=|AA_1|$，$|BF|=|BB_1|$，即 $|AB|=|AF|+|BF|=|AA_1|+|BB_1|$，由梯形的中位线性质得点 D 到准线 l 的距离为 $\frac{1}{2}|AB|=4$，则点 D 的横坐标为 3. 故选 B.

11. D　$\because f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\cos 2x|+|\sin 2x|=f(x)$，$\therefore \frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 的一个周期，故 A 错误；要使 $f(x)=2$，即 $|\sin 2x|+|\cos 2x|=2$，即 $|\sin 2x|=|\cos 2x|=1$，显然不成立，故 B 错误；当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$ 时，$f(x)=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，$\frac{\pi}{4}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{4}$，$\therefore f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上先增后减，故 C 错误；$\because f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\right|+\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\right|=|\cos 2x|+|\sin 2x|=f(x)$，故 D 正确. 故选 D.

12. C　由题意得，$\ln x-x^2+ax=0$ 在 $x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$ 上有两解，即 $a=x-\frac{\ln x}{x}$ 在 $x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$ 上有两解. 令 $h(x)=x-\frac{\ln x}{x}$，故 $h'(x)=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}$；令 $\varphi(x)=x^2+\ln x-1$，故 $\varphi(x)$ 在 $x\in\left[\frac{1}{e},e\right]$ 上单调递增，且 $\varphi(1)=0$，故当 $x\in\left[\frac{1}{e},1\right)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in(1,e]$ 时，$h'(x)>0$，$\therefore h(x)_{\min}=h(1)=1$，又 $h\left(\frac{1}{e}\right)=e+\frac{1}{e}$，$h(e)=e-\frac{1}{e}$，$\therefore a\in\left(1,e-\frac{1}{e}\right]$，故选 C.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. -6

由题意得，$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,-4)$，$\therefore(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=3\times2-4\times3=-6$.

14. $1+\sqrt{2}$

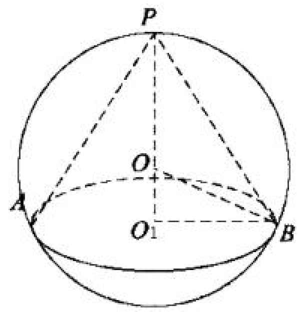
由题意得，$F_1F_2=F_2B$，$\therefore\triangle AF_1F_2\cong\triangle ABF_2$，$\therefore\angle F_1AF_2=\angle BAF_2$，

$\because\angle F_1AB=90°$，$\therefore\angle F_1AF_2=45°$，$\therefore AF_2=F_1F_2$. $\because$点 A 在双曲线 C 上，且

$AF_2\perp x$ 轴，$\therefore\dfrac{c^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$\therefore y=\pm\dfrac{b^2}{a}$，$\therefore\dfrac{b^2}{a}=2c$，$\therefore b^2=2ac$，$\therefore c^2-a^2=2ac$，

$\therefore e^2-2e-1=0$，解得 $e=1+\sqrt{2}$ 或 $e=1-\sqrt{2}$（舍去），$\therefore C$ 的离心率为 $1+\sqrt{2}$.

15. 3π

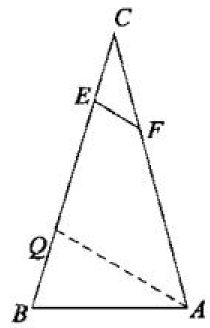


设 $O_1B=r$，球 O 的半径为 R，则 $PB=3r$，由球 O 的表面积为 $4\pi R^2=\dfrac{81\pi}{8}$，得 $R^2=\dfrac{81}{32}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OO_1B$ 中，

$R^2=(PO_1-R)^2+r^2$，即 $R^2=(2\sqrt{2}r-R)^2+r^2$，

解得 $r=1$，故圆锥 PO_1 的侧面积为 $\pi r\cdot PB=3\pi$.

16. $\left[\sqrt{6}-\sqrt{2},\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$



由题意得，外接圆半径为 2，$\therefore AB=4\sin30°=2$. 由 $\dfrac{BC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}$ 得，$A=B=75°$. 过 A 作 EF 的平行线交 BC 于 Q，在 $\triangle ABC$ 中，$4=2BC^2-2BC^2\cdot\cos30°$，

$\therefore BC=\sqrt{6}+\sqrt{2}$；在 $\triangle QBA$ 中，

$BQ=\sqrt{2AB^2-2AB^2\cos30°}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，

$\therefore BE$ 的取值范围为 $\left[\sqrt{6}-\sqrt{2},\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）$\because a_{n+1}(a_{n+1}-1)=a_n(a_n+1)$，

$\therefore a_{n+1}^2-a_n^2=a_{n+1}+a_n$，即 $(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)=a_{n+1}+a_n$，……………………3 分

$\because a_n>0$，$\therefore a_{n+1}+a_n>0$，$\therefore a_{n+1}-a_n=1$，……………………4 分

$\because a_1=1$，$\therefore$数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1、公差为 1 的等差数列，$\therefore a_n=n$. …………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$b_n=\dfrac{2a_n+3}{a_{n+1}^2a_{n+2}^2}=\dfrac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}=\dfrac{1}{(n+1)^2}-\dfrac{1}{(n+2)^2}$，…………8 分

$\therefore S_n=\left(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}\right)+\left(\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}\right)+\cdots+\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}-\dfrac{1}{(n+2)^2}\right]=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{(n+2)^2}$，…10 分

$\because S_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+2)^2}$ 在 $n\in \mathbf{N}^*$ 上单调递增，且 $\frac{1}{(n+2)^2}>0$，……………11 分

$\therefore \frac{5}{36}\leqslant S_n<\frac{1}{4}$. ………………………12 分

18.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $AC^2=BC^2+AB^2-2AB\cdot BC\cdot\cos45°=4$，

$\therefore AC^2+BC^2=AB^2$，$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

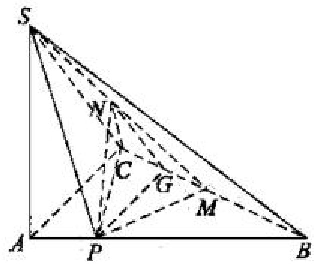
$\because AP=BP$，$\therefore CP\perp AB$. ………………………3 分

$\because SA\perp$ 平面 ABC，$CP\subset$ 平面 ABC，$\therefore SA\perp CP$.

$\because SA\cap AB=A$，$\therefore CP\perp$ 平面 SAB，………………………5 分

又 $SB\subset$ 平面 SAB，$\therefore CP\perp SB$. ………………………6 分

（Ⅱ）如图，取 CM 的中点 G，连接 PG，NG.



$\because NG$ 为 $\triangle SMC$ 的中位线，$\therefore NG// CS$，

$\therefore NG//$ 平面 SAC，………………………8 分

$\because PN//$ 平面 SAC，$NG\cap NP=N$，

$\therefore$ 平面 $PNG//$ 平面 SAC，

$\because$ 平面 $PNG\cap$ 平面 $ABC=PG$，

平面 $SAC\cap$ 平面 $ABC=AC$，

$\therefore PG// AC$，………………………10 分

$\therefore \frac{BP}{AP}=\frac{BG}{CG}=\frac{3}{1}$，$\therefore P$ 为线段 AB 靠近点 A 的四等分点，

$\therefore V_{S-CMP}=\frac{1}{3}|SA|\cdot S_{\triangle CMP}=\frac{1}{3}\times2\times\left(\frac{1}{2}\times1\times\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}$. ………………………12 分

19.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，这 200 名家长陪伴孩子的平均时间为

$30\times0.1+50\times0.3+70\times0.4+90\times0.2=64$（分钟）；………………………3 分

（Ⅱ）由题意得，分数在 $[40,60)$ 的抽取 3 人，记为 $1,2,3$，分数在 $[60,80)$ 的抽取 4 人，记为 A,B,C,D，

则任取 2 人，所有的情况为 $(1,2)$，$(1,3)$，$(1,A)$，$(1,B)$，$(1,C)$，$(1,D)$，$(2,3)$，$(2,A)$，$(2,B)$，$(2,C)$，$(2,D)$，$(3,A)$，$(3,B)$，$(3,C)$，$(3,D)$，(A,B)，(A,C)，(A,D)，(B,C)，(B,D)，(C,D)，共 21 种，………………………5 分

其中满足条件的为 $(1,A)$，$(1,B)$，$(1,C)$，$(1,D)$，$(2,A)$，$(2,B)$，$(2,C)$，$(2,D)$，$(3,A)$，$(3,B)$，$(3,C)$，$(3,D)$，(A,B)，(A,C)，(A,D)，(B,C)，(B,D)，(C,D)，共 18 种，………………………7 分

故所求概率 $P=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}$. ………………………8 分

（Ⅲ）由题意补充后的列联表如下：

	男性	女性	合计
陪伴时间少于60分钟	50	30	80
陪伴时间不少于60分钟	50	70	120
合计	100	100	200

……………………………10分

$\therefore K^2=\dfrac{200\times(50\times70-30\times50)^2}{100\times100\times80\times120}\approx8.333>6.635$，

∴有99%的把握认为陪伴时间的多少与家长的性别有关．……………………12分

20．（本小题满分12分）

（Ⅰ）由题意得，$f'(x)=-4x^2+2(a+1)x-a=-(2x-1)(2x-a)$，

由 $f'(x)=0$ 得 $x_1=\dfrac{1}{2},x_2=\dfrac{a}{2}$，……………………………2分

$\because f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上有极值，$\therefore\dfrac{a}{2}>2$，解得 $a>4$，

即 a 的取值范围是 $(4,+\infty)$．……………………………5分

（Ⅱ）设过点 $P(0,-1)$ 的直线与 $f(x)$ 的图象切于点 $\left(t,-\dfrac{4}{3}t^3+(a+1)t^2-at\right)$，

则切线斜率 $k=f'(t)=-4t^2+2(a+1)t-a=\dfrac{-\dfrac{4}{3}t^3+(a+1)t^2-at+1}{t-0}$，

即 $\dfrac{8}{3}t^3-(a+1)t^2+1=0$．……………………………7分

若过点 $P(0,-1)$ 只有一条直线与 $f(x)$ 的图象相切，

则关于 t 的方程 $\dfrac{8}{3}t^3-(a+1)t^2+1=0$ 只有1个实根．……………………………8分

设 $g(t)=\dfrac{8}{3}t^3-(a+1)t^2+1$，则 $g'(t)=8t^2-2(a+1)t$，

由 $g'(t)=0$ 得，$t_1=0,t_2=\dfrac{a+1}{4}>0$，

$\therefore g(t)$ 在 $(-\infty,0),\left(\dfrac{a+1}{4},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\dfrac{a+1}{4}\right)$ 上单调递减．………9分

$\because g(0)=1>0$，$g\left(\dfrac{a+1}{4}\right)=\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{a+1}{4}\right)^3-(a+1)\left(\dfrac{a+1}{4}\right)^2+1=-\dfrac{1}{48}(a+1)^3+1$，

$\because -1<a<2$，$\therefore 0<a+1<3$，$\therefore -\dfrac{1}{48}(a+1)^3+1>0$，即 $g\left(\dfrac{a+1}{4}\right)>0$，

$\therefore$ 当 $t>0$ 时，$g(t)>0$，$g(-1)=-\frac{8}{3}-(a+1)+1=-\frac{8}{3}-a<-\frac{5}{3}<0$，

且 $g(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

$\therefore$ 方程 $g(t)=0$ 在 $(-\infty,0)$ 上有唯一的实数根 $t_0\in(-1,0)$，

即当 $-1<a<2$ 时，过点 $P(0,-1)$ 只有一条直线与 $f(x)$ 的图象相切. ………12 分

21.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）由题意得，$2a=4\sqrt{2}$，则 $a=2\sqrt{2}$，$\therefore N\left(2\sqrt{2},0\right)$. ……………………………1 分

设 $P(x_0,y_0)$，则 $\frac{0+x_0+2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$，$\therefore x_0=\sqrt{2}$，……………………………2 分

$\because \frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times|y_0|=\sqrt{6}$，$\therefore |y_0|=\sqrt{3}$，$\therefore \frac{2}{8}+\frac{3}{b^2}=1$，$\therefore b=2$，

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. ……………………………5 分

（Ⅱ）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由余弦定理得，$|OM|^2=|OA|^2+|AM|^2-2|OA|\cdot|AM|\cdot\cos\angle OAM$，

$|AB|^2=|OA|^2+|OB|^2-2|OA|\cdot|OB|\cdot\cos\angle AOB$，

两式相加得，$|OM|^2+|AB|^2=2\left(|OA|^2+|OB|^2\right)$. ……………………………7 分

$\because k_{OA}\cdot k_{OB}=-\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-\frac{1}{2}$，$\therefore x_1x_2=-2y_1y_2$. ……………………………8 分

$\because$ 点 A,B 在椭圆 C 上，$\therefore \frac{x_1^2}{8}+\frac{y_1^2}{4}=1$，$\frac{x_2^2}{8}+\frac{y_2^2}{4}=1$，

$\therefore x_1^2-8=-2y_1^2$，$x_2^2-8=-2y_2^2$，……………………………9 分

$\therefore \left(x_1^2-8\right)\left(x_2^2-8\right)=4y_1^2y_2^2$，$\left(x_1^2-8\right)+\left(x_2^2-8\right)=-2\left(y_1^2+y_2^2\right)$，

由 $x_1x_2=-2y_1y_2$，化简得 $x_1^2+x_2^2=8$，$y_1^2+y_2^2=4$，……………………………11 分

$\therefore |OM|^2+|AB|^2=2\left(|OA|^2+|OB|^2\right)=2\left(x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2\right)=24$，

$\therefore |OM|^2+|AB|^2$ 是定值，定值为 24. ……………………………12 分

请考生从第 22、23 题中任选一题作答. 注意：只能做选定的题目，如果多做，则按所做的第一题记分，解答时请写清题号.

22.（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

（Ⅰ）$\because$ 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho(1-\cos\theta)=2$，$\therefore \rho^2=(\rho\cos\theta+2)^2$，

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入，得 $y^2=4(x+1)$，

$\therefore$ 曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2=4(x+1)$. ……………………………3 分

由题意得，直线 l 的普通方程为 $y=\sqrt{3}x$. ……………………5 分

（Ⅱ）解法一：直线 l 的方程为 $\sqrt{3}x-y=0$，$\therefore$ 直线 l 分成两条射线，

其极坐标方程分别为 $\theta=\dfrac{\pi}{3}(\rho\geqslant0)$ 或 $\theta=\dfrac{4\pi}{3}(\rho\geqslant0)$. ……………………6 分

联立 $\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{3}\\ \rho(1-\cos\theta)-2=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}\theta=\dfrac{4\pi}{3}\\ \rho(1-\cos\theta)-2=0\end{cases}$，

分别解得 $\rho=4$ 和 $\rho=\dfrac{4}{3}$，$\therefore|MN|=4+\dfrac{4}{3}=\dfrac{16}{3}$. ……………………8 分

$\because A\left(2,\dfrac{\pi}{6}\right)$ 到 $\theta=\dfrac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$ 的距离为 $2\times\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$，

$\therefore\triangle AMN$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{16}{3}\times1=\dfrac{8}{3}$. ……………………10 分

解法二：联立 $\begin{cases}y=\sqrt{3}x\\ y^2=4(x+1)\end{cases}$，整理得 $3x^2-4x-4=0$，……………………6 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{4}{3}$，$x_1x_2=-\dfrac{4}{3}$，

$\therefore|MN|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{16}{3}$，……………8 分

又点 $A(\sqrt{3},1)$ 到直线 l 的距离 $d=1$，

$\therefore S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{16}{3}\times1=\dfrac{8}{3}$. ……………………10 分

23.（本小题满分 10 分）选修 4–5：不等式选讲

（Ⅰ）由题意得，$f(x)=|x-1|-2|x-2|=\begin{cases}x-3,x<1\\ 3x-5,1\leqslant x\leqslant2\\ -x+3,\quad x>2\end{cases}$，……………………3 分

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,2]$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f(2)=1$，$\therefore t=1$. ……………………5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，$2a+b+2c=3$，……………………6 分

由柯西不等式得，$(a^2+b^2+c^2)(2^2+1^2+2^2)\geqslant(2a+b+2c)^2$（当且仅当 $\dfrac{a}{2}=b=\dfrac{c}{2}$ 时取等号），

$\therefore a^2+b^2+c^2\geqslant1$，即 $a^2+b^2+c^2\geqslant t$. ……………………10 分

关于我们