江西省五市九校协作体 2023 届第一次联考数学（理科）试卷答案

一. 序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	D	C	D	A	A	A	A	B	D	D
二. 填空题	13.	182		14.	$\frac{3}{8}$		15.	10		16.	6	

三. 答题:

17. 解

（1）$\because$数列$\{a_n\}$是递增的等比数列，且$a_4+a_6=40$，$a_5=16$，

$$\therefore\begin{cases}a_4+a_6=40\\a_4<a_6\\a_4a_6={a_5}^2=256\end{cases},$$

$\therefore a_4$，a_6是方程$x^2-40x+256=0$的两个根，

解方程$x^2-40x+256=0$，

得$a_4=8$，$a_6=32$，

$\therefore q=\dfrac{a_5}{a_4}=\dfrac{16}{8}=2$，$a_1=\dfrac{a_4}{q^3}=\dfrac{8}{8}=1$，

$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=1\times2^{n-1}=2^{n-1}$．

（2）由（1）得：$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$，

$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{2^n}{(2^n-1)\cdot(2^{n+1}-1)}=\dfrac{1}{2^n-1}\ \dfrac{1}{2^{n+1}-1}$，

$\therefore$数列$\{b_n\}$的前n项和：

$T_n=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{15}+\ldots+\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}=1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}<1$，且$T_n<m-2021$对一切$n\in N^*$成立，

$\therefore m-2021\geqslant1$，解得$m\geqslant2022$，

$\therefore$最小正整数m为 2022．

18.（1）证明：取EC的中点G，连接BD交AC于N，连接GN，GF，

因为$ABCD$是菱形，所以$AC\perp BD$，且N是AC的中点，

所以$GN//AE$且$GN=\frac{1}{2}AE$，又$AE//BF$，$AE=2BF=2$，

所以$GN//BF$且$GN=BF$，所以四边形$BNGF$是平行四边形，

所以$GF//BN$，

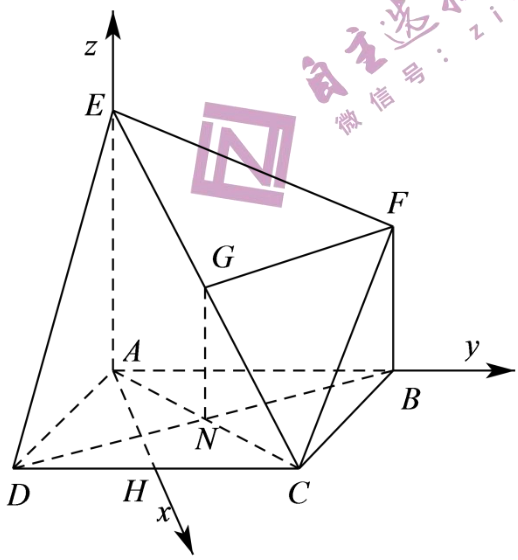
又$EA\perp$平面$ABCD$，$BN\subset$平面$ABCD$，所以$EA\perp BN$，

又因为$AC\bigcap EA=A$，$AC,EA\subset$平面EAC，

所以$NB\perp$平面EAC，所以$GF\perp$平面EAC，

又$GF\subset$平面EFC，所以平面$EFC\perp$平面EAC；

（2）解：取CD的中点H，由四边形$ABCD$是菱形，$\angle ABC=60°$，则$\angle ADC=60°$，



$\therefore\triangle ADC$是正三角形，$\therefore AH\perp CD$，$\therefore AH\perp AB$，又$AE\perp$平面$ABCD$，

所以以A为原点，AH，AB，AE为坐标轴建立空间直角坐标系，

设在棱EC上存在点M使得平面MBD与平面$ABCD$的夹角为$45°$，

则$D\left(\sqrt{3},-1,0\right)$，$B\left(0,2,0\right)$，$C\left(\sqrt{3},1,0\right)$，$E\left(0,0,2\right)$，$F\left(0,2,1\right)$，$A\left(0,0,0\right)$，

则设$\overrightarrow{EM}=\lambda\overrightarrow{EC}=\lambda\left(\sqrt{3},1,-2\right)=\left(\sqrt{3}\lambda,\lambda,-2\lambda\right)$，$\therefore M\left(\sqrt{3}\lambda,\lambda,2-2\lambda\right)$，

所以$\overrightarrow{DM}=\left(\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3},\lambda+1,2-2\lambda\right)$，$\overrightarrow{BM}=\left(\sqrt{3}\lambda,\lambda-2,2-2\lambda\right)$，$\overrightarrow{BC}=\left(\sqrt{3},-1,0\right)$，$\overrightarrow{BF}=\left(0,0,1\right)$，

设平面DBM的一个法向量为$\vec{n}=(x$，y，$z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DM}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}(\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3})x+(\lambda+1)y+(2-2\lambda)z=0\\ \sqrt{3}\lambda x+(\lambda-2)y+(2-2\lambda)z=0\end{cases}$，令$x=\sqrt{3}$，$y=1$，

得$\vec{n}=\left(\sqrt{3},1,\dfrac{2\lambda-1}{\lambda-1}\right)$

平面$ABCD$的法向量可以为$\overrightarrow{m}=(0,0,1)$，

$\therefore|\cos<\vec{n},\vec{m}>|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\left|\dfrac{2\lambda-1}{\lambda-1}\right|}{\sqrt{4+\left(\dfrac{2\lambda-1}{\lambda-1}\right)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得$\lambda=\dfrac{3}{4}$，

所以$M\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4},\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{2}\right)$，则$\overrightarrow{CM}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{4},-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right)$

设平面BCF的一个法向量为$\vec{u}=(a,b,c)$，

则$\begin{cases}\vec{u}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}\sqrt{3}a-b=0\\ c=0\end{cases}$，取$a=1$，得$\vec{u}=(1,\sqrt{3},0)$，

所以点M到平面BCF的距离$d=\dfrac{|\vec{u}\cdot\overrightarrow{CM}|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

19.（1）由频率分步直方图得，得分为 17，18 的人数分别为 6 人，12 人，

所以两人得分之和不大于 35 分为两人得分均为 17 分，或两人中 1 人 17 分 1 人 18 分，

所以$P=\dfrac{C_6^2+C_6^1C_{12}^1}{C_{100}^2}=\dfrac{29}{1650}$.

（2）$\bar{x}=160\times0.06+170\times0.12+180\times0.34+190\times0.30+200\times0.1+210\times0.08=185$

又$\sigma^2\approx169,\sigma=13$，所以正式测试时，$\mu=195,\sigma=13$，所以$\mu-\sigma=182$，

①所以$P(X>182)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times0.6826=0.8413$，所以$0.8413\times1000=841.3\approx841$人；

②由正态分布模型，任取 1 人，每分钟跳绳个数 195 以上的概率为$\frac{1}{2}$，即$Y\sim B\left(3,\dfrac{1}{2}\right)$，

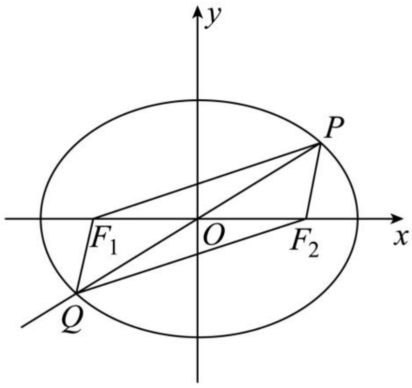
所以$P(Y=0)=C_3^0\left(\dfrac{1}{2}\right)^0\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$，$P(Y=1)=C_3^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{8}$，

所以$P(Y=2)=C_3^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^1=\dfrac{3}{8}$，$P(Y=3)=C_3^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^0=\dfrac{1}{8}$，

所以Y的分布列为

Y	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

所以$E(Y)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$.



20（1）

设椭圆C的右焦点为F_2，连接PF_2， QF_2

根据椭圆的对称性可知$|QF_1|=|PF_2|$，四边形PF_1QF_2为平行四边形.

又$|PF_1|=3|QF_1|$，所以$|PF_1|=3|PF_2|$

而$|PF_1|+|PF_2|=2a$，所以$|PF_1|=\frac{3a}{2}$， $|PF_2|=\frac{a}{2}$

在四边形PF_1QF_2中， $\cos\angle PF_1Q=-\frac{1}{3}$，

所以$\cos\angle F_1PF_2=\cos(\pi-\angle PF_1Q)=-\cos\angle PF_1Q=\frac{1}{3}$，

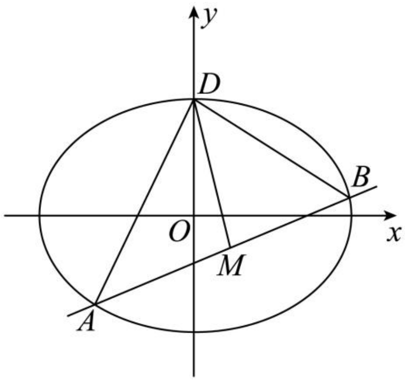
在$\triangle PF_1F_2$中，根据余弦定理得

$$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2$$

即$(2c)^2=\left(\frac{3a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2\cdot\frac{3a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{3}$

化简得$a^2=2c^2$.

所以椭圆C的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；。。。。。。5 分



(2)

因为椭圆C的上顶点为$D(0,2)$，所以$b=2$，所以$a^2=b^2+c^2=4+c^2$，

又由（1）知$2c^2=a^2$，解得$a^2=8$，

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

在$\triangle ABD$中，$\angle AMD=2\angle ABD$，$\angle AMD=\angle ABD+\angle BDM$，

所以$\angle ABD=\angle BDM$，从而$|DM|=|BM|$，

又M为线段AB的中点，即$|BM|=\frac{1}{2}|AB|$，所以$|DM|=\frac{1}{2}|AB|$，

因此$\angle ADB=90^\circ$，从而$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=0$，

根据题意可知直线l的斜率一定存在，设它的方程为$y=kx+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$消去$y$得$(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-8=0$ ①，

$\Delta=(4km)^2-4(2m^2-8)(2k^2+1)>0$，

根据韦达定理可得$x_1+x_2=-\frac{4km}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-8}{2k^2+1}$，

所以$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=(x_1,y_1-2)\cdot(x_2,y_2-2)=(1+k^2)x_1x_2+k(m-2)(x_1+x_2)+(m-2)^2$

$=(1+k^2)\frac{2m^2-8}{2k^2+1}+k(m-2)\left(\frac{4km}{2k^2+1}\right)+(m-2)^2$

所以$(1+k^2)\frac{2m^2-8}{2k^2+1}+k(m-2)\left(-\frac{4km}{2k^2+1}\right)+(m-2)^2=0$，

整理得$(m-2)(3m+2)=0$，解得$m=2$或$m=-\frac{2}{3}$.

又直线l不经过点$(0,2)$，所以$m=2$舍去，

于是直线l的方程为$y=kx-\frac{2}{3}$，恒过定点$\left(0,-\frac{2}{3}\right)$，

该点在椭圆C内，满足关于x的方程①有两个不相等的解，

所以直线l恒过定点，定点坐标为$\left(0,-\frac{2}{3}\right)$.。。。。。。12 分

21．(1)$\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$；

(2)【分析】(1)$f(x)$在$(0,+\infty)$内有两个不同的极值点x_1、x_2，等价于$f'(x)$在$(0,+\infty)$内有两个不同的零点x_1、x_2.研究$f'(x)$的单调性和零点情况即可求出 a 的范围；

(2)设$0<x_1<\frac{1}{a}<x_2$，由(1)知$\ln x_1-ax_1=0$且$\ln x_2-ax_2=0$，则$a=\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{\ln x_2}{x_2}=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，将 a=$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$代入要证的不等式$x_1+x_2>\frac{m}{a}$，可将不等式化为$\frac{\left(\frac{x_1}{x_2}+1\right)\ln\frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2}-1}-m>0$，令$t=\frac{x_1}{x_2}\in(0,1)$，则不等式化为$\ln t-\frac{t-1}{t+1}m<0$，问题转化为$g(t)=\ln t-\frac{t-1}{t+1}m<0$在(0，1)恒成立即可.

(1)

函数$f(x)$定义域为$(0,+\infty)$，

$f(x)$在$(0,+\infty)$内有两个不同的极值点x_1、x_2，等价于$f'(x)=\ln x-ax$在$(0,+\infty)$内有两个不同的零点x_1、x_2．设$h(x)=\ln x-ax$，由$h'(x)=\frac{1-ax}{x}$，

当$a\le 0$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，至多只有一个零点，不符题意；

当$a>0$时，在$\left(0,\frac{1}{a}\right)$上$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增；在$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$上$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，

∴当$x=\frac{1}{a}$时，$f'(x)_{\max}=f'\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a-1$，函数$f'(x)$有两个零点，则必有$f'(x)_{\max}>0$，

即$-\ln a-1>0$，解得$0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$．

易证$\ln x<\sqrt{x}$，证明如下：令$m(x)=\sqrt{x}-\ln x$，$m'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$，

当$x\in(0,4)$时，$m'(x)<0$，$m(x)$单调递减，当$x\in(4,+\infty)$时，$m(x)$单调递增，

故$m(x)_{\min}=m(4)=2-\ln 2>0$，故$m(x)=\sqrt{x}-\ln x>0$，得证．$\therefore f'\left(\frac{1}{a^2}\right)=\ln\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}<\frac{1}{a}-\frac{1}{a}=0$，又$f'(1)=-a<0$，

$\therefore f'(x)$在$\left(1,\frac{1}{a}\right)$和$\left(\frac{1}{a},\frac{1}{a^2}\right)$上各有一个零点$x_1$、$x_2$，此时：

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↓	极小值	↑	极大值	↓

故$f(x)$在定义域内有两个不同的极值点x_1，x_2时，a的范围为$0<a<\frac{1}{e}$；

(2)

方法1：由(1)可知x_1，x_2是$h(x)=\ln x-ax$的两个零点，不防设$0<x_1<\frac{1}{a}<x_2$，

由$\ln x_1-ax_1=0$且$\ln x_2-ax_2=0$，得$a=\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{\ln x_2}{x_2}=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$．

$$\because x_1+x_2>\frac{m}{a}\Leftrightarrow\frac{(x_1+x_2)(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}-m>0\Leftrightarrow\frac{\left(\frac{x_1}{x_2}+1\right)\ln\frac{x_1}{x_2}}{\frac{x_1}{x_2}-1}-m>0(*)．$$

令$t=\frac{x_1}{x_2}\in(0,1)$，则$(*)\Leftrightarrow\ln t-\frac{t-1}{t+1}m<0(**)$，

记$g(t)=\ln t-\frac{t-1}{t+1}m<0$，$t\in(0,1)$，

则$g'(t)=\frac{t^2-2(m-1)t+1}{t(t+1)^2}$，令$p(t)=t^2-2(m-1)t+1$，$0<m\le 2$．

又$\Delta=4(m-1)^2-4=4m(m-2)\le 0$，则$p(t)\ge 0$，即$g'(t)\ge 0$，

$\therefore g(t)$在$(0,1)$上单调递增，故$g(t)<g(1)=0$，即$(**)$成立．

$\therefore$不等式$x_1+x_2>\frac{m}{a}$成立．

方法2：欲证$x_1+x_2>\frac{m}{a}$，由$0<m\le 2$，$0<a<\frac{1}{e}$，则只需证：$x_1+x_2>\frac{2}{a}$．

不妨设$0<x_1<\frac{1}{a}<x_2$，

则$\ln x_1-ax_1=0$且$\ln x_2-ax_2=0$，则$a=\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{\ln x_2}{x_2}=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，

$\therefore x_1+x_2>\dfrac{2}{a}\Leftrightarrow\dfrac{(x_1+x_2)(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}-2>0\Leftrightarrow\dfrac{\left(\dfrac{x_1}{x_2}+1\right)\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{\dfrac{x_1}{x_2}-1}-2>0(*)$，

令$t=\dfrac{x_1}{x_2}\in(0,1)$，则$(*)\Leftrightarrow\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}<0\ (**)$，记$g(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$，$t\in(0,1)$，

由$g'(t)=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}\geq 0$，即$g(t)$在$(0,1)$上单调递增，故$g(t)<g(1)=0$，即$(**)$成立.故$x_1+x_2>\dfrac{m}{a}$.

【点睛】本题第一问关键是找到 $x=1$ 和 $x=\dfrac{1}{a^2}$，判断$f'\left(\dfrac{1}{a^2}\right)<0$，$f'(1)<0$，从而根据零点存在性定理判断$f'(x)$在$\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$和$\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{a^2}\right)$上各有一个零点；第二问的关键是利用$x_1$，$x_2$是$f'(x)=\ln x-ax$的两个零点用$x_1$，$x_2$替换 a，再利用换元$t=\dfrac{x_1}{x_2}\in(0,1)$将双变量转化为单变量进行证明.

22．(1)$\rho=-4\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right),\theta\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$；

(2)$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$.

【分析】（1）求得$\overset{\frown}{OQ}$的直角坐标方程，再转化为极坐标方程即可；

（2）求得曲线C的普通方程，结合$\overset{\frown}{OQ}$的直角坐标方程，求得交点的直角坐标，再转化为极坐标即可.

【详解】（1）对点$P\left(2,-\dfrac{\pi}{6}\right)$，设其直角坐标为$(x,y)$，则$x=2\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3},y=2\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$，

即其直角坐标为$(\sqrt{3},-1)$，

故$\overset{\frown}{OQ}$在直角坐标系下的方程为：$(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2=4,x\in[0,\sqrt{3}],y\in[0,1]$，

由$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$可得：$\rho=2\sqrt{3}\cos\theta-2\sin\theta=-4\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$，

故$\overset{\frown}{OQ}$的极坐标方程为：$\rho=-4\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right),\theta\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$.

（2）由题可得曲线C的普通方程为：$y=-\sqrt{3}x+2$，联立$(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2=4$，

可得$x^2-2\sqrt{3}x+2=0$，解得$x=\sqrt{3}+1$或$\sqrt{3}-1$，又$x\in[0,\sqrt{3}]$，故$x=\sqrt{3}-1$，则$y=\sqrt{3}-1$，

即曲线 C 与$\overset{\frown}{OQ}$交点的直角坐标为$(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}-1)$，设其极坐标为(ρ,θ)，

则$\rho=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$， $\theta=\dfrac{\pi}{4}$，

即曲线 C 与$\overset{\frown}{OQ}$交点的极坐标为$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$.

23、

(1) 当 $a=3$ 时，$f(x)\le 2$ 即为$|x-1|+|2x-3|\le 2$，

等价于$\begin{cases} x\ge\dfrac{3}{2} \\ x-1+2x-3\le 2\end{cases}$或$\begin{cases} 1<x<\dfrac{3}{2} \\ x-1+3-2x\le 2\end{cases}$或$\begin{cases} x\le 1 \\ 1-x+3-2x\le 2\end{cases}$，

解得$\dfrac{3}{2}\le x\le 2$或$1<x<\dfrac{3}{2}$或$\dfrac{2}{3}\le x\le 1$，

则原不等式的解集为$[\dfrac{2}{3},2]$；。。。。。。 5 分

(2) 不等式$|x-1|+f(x)<3$的解集非空等价于$|2x-2|+|2x-a|<3$有解.

由$|2x-2|+|2x-a|\ge|2x-2+a-2x|=|a-2|$，

（当且仅当$(2x-2)(2x-a)\le 0$时取得等号），

所以$|a-2|<3$，解得$-1<a<5$，故 a 的取值范围是$(-1,5)$．。。。。。。 10 分