



2016 年全国高中数学联合竞赛二试 (A 卷)

参考答案及评分标准

一、(本题满分 40 分) 设实数 $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$ 满足 $9a_i > 11a_{i+1}^2 (i=1, 2, \dots, 2015)$.

求 $(a_1 - a_2^2) \cdot (a_2 - a_3^2) \cdot \dots \cdot (a_{2015} - a_{2016}^2) \cdot (a_{2016} - a_1^2)$ 的最大值.

解 令 $P = (a_1 - a_2^2) \cdot (a_2 - a_3^2) \cdot \dots \cdot (a_{2015} - a_{2016}^2) \cdot (a_{2016} - a_1^2)$.

由已知得, 对 $i=1, 2, \dots, 2015$, 均有 $a_i - a_{i+1}^2 > \frac{11}{9}a_{i+1}^2 - a_{i+1}^2 \geq 0$.

若 $a_{2016} - a_1^2 \leq 0$, 则 $S \leq 0$10 分

以下考虑 $a_{2016} - a_1^2 > 0$ 的情况. 约定 $a_{2017} = a_1$. 由平均不等式得

$$\begin{aligned} \frac{1}{P^{2016}} &\leq \frac{1}{2016} \sum_{i=1}^{2016} (a_i - a_{i+1}^2) = \frac{1}{2016} \left(\sum_{i=1}^{2016} a_i - \sum_{i=1}^{2016} a_{i+1}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2016} \left(\sum_{i=1}^{2016} a_i - \sum_{i=1}^{2016} a_i^2 \right) = \frac{1}{2016} \sum_{i=1}^{2016} a_i(1 - a_i) \quad \dots\dots\dots 20 \text{ 分} \\ &\leq \frac{1}{2016} \sum_{i=1}^{2016} \left(\frac{a_i + (1 - a_i)}{2} \right)^2 = \frac{1}{2016} \cdot 2016 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

所以 $P \leq \frac{1}{4^{2016}}$30 分

当 $a_1 = a_2 = \dots = a_{2016} = \frac{1}{2}$ 时, 上述不等式等号成立, 且有 $9a_i > 11a_{i+1}^2$ ($i=1, 2, \dots, 2015$), 此时 $P = \frac{1}{4^{2016}}$.

综上所述, 所求最大值为 $\frac{1}{4^{2016}}$40 分

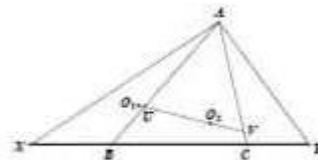


二、(本题满分 40 分) 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, X, Y 是直线 BC 上两点 (X, B, C, Y 顺次排列), 使得

$$BY \cdot AC = CY \cdot AB.$$

设 $\triangle ACX, \triangle ABY$ 的外心分别为 O_1, O_2 , 直线 O_1O_2 与 AB, AC 分别交于点 U, V .

证明: $\triangle AUV$ 是等腰三角形.





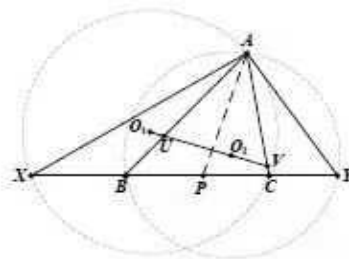
证法一 作 $\angle BAC$ 的内角平分线交 BC 于点 P ，设三角形 ACX 和 ABY 的外接圆分别为 ω_1 和 ω_2 。由内角平分线的性质知， $\frac{BP}{CP} = \frac{AB}{AC}$ 。由条件可得 $\frac{BX}{CY} = \frac{AB}{AC}$ 。从而

$$\frac{PX}{PY} = \frac{BX+BP}{CY+CP} = \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CP}$$

即 $CP \cdot PX = BP \cdot PY$ 。.....20分

故 P 对圆 ω_1 和 ω_2 的幂相等，所以 P 在 ω_1 和 ω_2 的根轴上。.....30分

于是 $AP \perp O_1O_2$ ，这表明点 U, V 关于直线 AP 对称，从而三角形 AUV 是等腰三角形。.....40分



任意10.com

证法二 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O ，连接 OO_1, OO_2 。过点 O, O_1, O_2 分别作直线 BC 的垂线，垂足分别为 D, D_1, D_2 。作 $O_1K \perp OD$ 于点 K 。

我们证明 $OO_1 = OO_2$ 。在直角三角形 OKO_1 中，

$$OO_1 = \frac{O_1K}{\sin \angle O_1OK}$$

由外心的性质， $OO_1 \perp AC$ 。又 $OD \perp BC$ ，故 $\angle O_1OK = \angle ACB$ 。

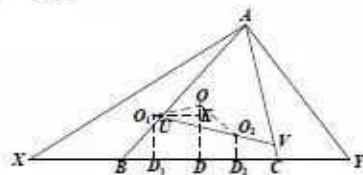
而 D, D_1 分别是 BC, CX 的中点，所以 $DD_1 = CD_1 - CD = \frac{1}{2}CX - \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}BX$ 。

因此

$$OO_1 = \frac{O_1K}{\sin \angle O_1OK} = \frac{DD_1}{\sin \angle ACB} = \frac{\frac{1}{2}BX}{\frac{AB}{2R}} = R \cdot \frac{BX}{AB}$$

这里 R 是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径。同理 $OO_2 = R \cdot \frac{CY}{AC}$ 。.....10分

由已知条件可得 $\frac{BX}{AB} = \frac{CY}{AC}$ ，故 $OO_1 = OO_2$ 。.....20分



由于 $OO_1 \perp AC$ ，所以 $\angle AVU = 90^\circ - \angle OO_1O_2$ 。同理 $\angle AUV = 90^\circ - \angle OO_2O_1$ 。.....30分

又因为 $OO_1 = OO_2$ ，故 $\angle OO_1O_2 = \angle OO_2O_1$ ，从而 $\angle AUV = \angle AVU$ 。这样 $AU = AV$ ，即 $\triangle AUV$ 是等腰三角形。.....40分



三、(本题满分 50 分) 给定空间中 10 个点, 其中任意四点不在一个平面上. 将某些点之间用线段相连, 若得到的图形中没有三角形也没有空间四边形, 试确定所连线段数目的最大值.

解 以这 10 个点为顶点, 所连线段为边, 得到一个 10 阶简单图 G . 我们证明 G 的边数不超过 15.

设 G 的顶点为 v_1, v_2, \dots, v_{10} , 共有 k 条边. 用 $\deg(v_i)$ 表示顶点 v_i 的度. 若 $\deg(v_i) \leq 3$ 对 $i=1, 2, \dots, 10$ 都成立, 则

$$k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} \deg(v_i) \leq \frac{1}{2} \times 10 \times 3 = 15.$$

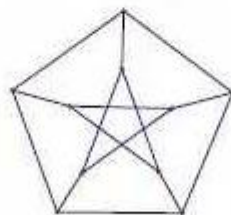
假设存在 v_i 满足 $\deg(v_i) \geq 4$. 不妨设 $\deg(v_1) = n \geq 4$, 且 v_1 与 v_2, \dots, v_{n+1} 均相邻. 于是 v_2, \dots, v_{n+1} 之间没有边, 否则就形成三角形. 所以, v_1, v_2, \dots, v_{n+1} 之间恰有 n 条边.10 分

对每个 j ($n+2 \leq j \leq 10$), v_j 至多与 v_2, v_3, \dots, v_{n+1} 中的一个顶点相邻 (否则设 v_j 与 v_s, v_t ($2 \leq s < t \leq n+1$) 相邻, 则 v_1, v_s, v_j, v_t 就对应了一个空间四边形的四个顶点, 这与题设条件矛盾.), 从而 v_2, \dots, v_{n+1} 与 v_{n+2}, \dots, v_{10} 之间的边数至多 $10 - (n+1) = 9 - n$ 条.20 分

在 v_{n+2}, \dots, v_{10} 这 $9 - n$ 个顶点之间, 由于没有三角形, 由托兰定理, 至多

$\left\lfloor \frac{(9-n)^2}{4} \right\rfloor$ 条边. 因此 G 的边数

$$k \leq n + (9-n) + \left\lfloor \frac{(9-n)^2}{4} \right\rfloor = 9 + \left\lfloor \frac{(9-n)^2}{4} \right\rfloor \leq 9 + \left\lfloor \frac{25}{4} \right\rfloor = 15. \quad \text{.....30 分}$$



如图给出的图共有 15 条边, 且满足要求.

综上所述, 所求边数的最大值为 15.50 分

四、(本题满分 50 分) 设 p 与 $p+2$ 均是素数, $p > 3$. 数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + \left\lceil \frac{pa_{n-1}}{n} \right\rceil$, $n = 2, 3, \dots$. 这里 $\lceil x \rceil$ 表示不小于实数 x 的最小整数.

证明: 对 $n = 3, 4, \dots, p-1$ 均有 $n \mid pa_{n-1} + 1$ 成立.

证明 首先注意, $\{a_n\}$ 是整数数列.

对 n 用数学归纳法. 当 $n = 3$ 时, 由条件知 $a_2 = 2 + p$, 故 $pa_2 + 1 = (p+1)^2$. 因 p 与 $p+2$ 均是素数, 且 $p > 3$, 故必须 $3 \mid p+1$. 因此 $3 \mid pa_2 + 1$, 即 $n = 3$ 时结论成立.



对 $3 < n \leq p-1$, 设对 $k=3, \dots, n-1$ 成立 $k \mid pa_{k-1} + 1$, 此时 $\left\lceil \frac{pa_{k-1}}{k} \right\rceil = \frac{pa_{k-1} + 1}{k}$,

故
$$pa_{k-1} + 1 = p \left(a_{k-2} + \left\lceil \frac{pa_{k-2}}{k-1} \right\rceil \right) + 1 = p \left(a_{k-2} + \frac{pa_{k-2} + 1}{k-1} \right) + 1$$

$$= \frac{(pa_{k-2} + 1)(p+k-1)}{k-1}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

故对 $3 < n \leq p-1$, 有

$$pa_{n-1} + 1 = \frac{p+n-1}{n-1} (pa_{n-2} + 1) = \frac{p+n-1}{n-1} \cdot \frac{p+n-2}{n-2} (pa_{n-3} + 1)$$

$$= \dots = \frac{p+n-1}{n-1} \cdot \frac{p+n-2}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{p+3}{3} (pa_2 + 1), \quad \dots\dots\dots 20 \text{ 分}$$

因此
$$pa_{n-1} + 1 = \frac{2n(p+1)}{(p+n)(p+2)} C_{p+n}^n.$$

由此知 (注意 C_{p+n}^n 是整数) $n \mid (p+n)(p+2)(pa_{n-1} + 1).$ ①
.....40 分

因 $n < p$, p 素数, 故 $(n, n+p) = (n, p) = 1$, 又 $p+2$ 是大于 n 的素数, 故 $(n, p+2) = 1$, 从而 n 与 $(p+n)(p+2)$ 互素, 故由①知 $n \mid pa_{n-1} + 1$. 由数学归纳法知, 本题得证.
.....50 分

更多数学竞赛相关资讯和消息, 请关注自主招生在线官方微信, 新鲜、独家、有料!

自主招生在线 (微信 ID: zizzsw)



扫一扫 关注官方微信