2023—2024 学年第一学期 8 月六校联合调研试题

高三数学答案

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．

1—4： BBDC　　　　5—8：ABCB

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

9．AC　10．ABC　11．BD　12．AC

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$-\frac{160}{27}$；14．$(\frac{1}{5},\ -\frac{2}{5})$；15．$(-\infty,\ 1]$；16．$25-12\sqrt{2}$．

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分

17.解：（1）$\because S_n=a_n+n^2-1$

$\therefore$当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=a_{n-1}+(n-1)^2-1$ ………………………2 分

两式相减得：$a_n=a_n-a_{n-1}+2n-1$，即 $a_{n-1}=2n-1$， ………………………4 分

$\therefore a_n=2n+1$ 且 $a_1=3$ 符合，$\therefore \{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n+1$ ………………………5 分

（2）由（1）可知 $b_n=\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2n+1}$，

$\therefore b_kb_{k+1}=\frac{1}{2k+1}\frac{1}{2k+3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$ ………………………8 分

$\therefore T_n=b_1b_2+b_2b_3+\cdots+b_nb_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{n}{3(2n+3)}$ ………………………10 分

18.解：（1）选①，$(a+c)(\sin A-\sin C)+(b-a)\sin B=0$，由正弦定理得

$(a+c)(a-c)+(b-a)b=0$，即 $a^2+b^2-c^2=ab$ ………………………2 分

$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$ ………………………4 分

$\because 0<C<\pi \therefore C=\frac{\pi}{3}$ ………………………5 分

选②，由 $2\sqrt{3}\sin C\cos C=1+2\cos^2C$ 得 $2\sqrt{3}\sin C\cos C=2+\cos 2C$

$\sqrt{3}\sin 2C-\cos 2C=2$，$\sin\left(2C-\frac{\pi}{6}\right)=1$

$\because 0<C<\pi \therefore -\frac{\pi}{6}<2C-\frac{\pi}{6}<\frac{11\pi}{6} \therefore 2C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2} \therefore C=\frac{\pi}{3}$ ………………………5 分

选③，由 $2\sin B-\sin A=2\sin C\cos A$

$\therefore 2\sin(A+C)-\sin A=2\sin C\cos A$

$\therefore 2\sin A\cos C+2\sin C\cos A-\sin A=2\sin C\cos A \therefore 2\sin C\cos A-\sin A=0$………………………3 分

$\because \sin A\neq 0$， ………………………4 分

$\therefore \cos C=\frac{1}{2}\because 0<C<\pi\therefore C=\frac{\pi}{3}$ ……………………5 分

（2）**解法一**：由（1）可知 $C=\frac{\pi}{3}$，又 $c=4$，由余弦定理得

$C^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-3ab=16$ ……………………6 分

$\therefore 3ab=(a+b)^2-16\leqslant 3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ……………………9 分

即 $a+b\leqslant 8$，当且仅当 $a=b=4$ 时取等号 ……………………10 分

又 $a+b>c=4$

$\therefore$周长的取值范围为 $(8,12]$ ……………………12 分

解法二：由（1）知 $C=\frac{\pi}{3}$，又 $c=4$ 正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{8}{\sqrt{3}}$ ……………………6 分

$\therefore$周长 $=\frac{8}{\sqrt{3}}(\sin A+\sin B)+4$，

又 $B=\pi-\left(A+\frac{\pi}{3}\right)\ \therefore 0<A<\frac{2\pi}{3}$， ……………………7 分

周长 $=\frac{8}{\sqrt{3}}\left(\sin A+\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)\right)+4=8\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)+4$， ……………………10 分

又 $\frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}\therefore \frac{1}{2}<\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$

$\therefore\triangle ABC$ 周长的取值范围为 $(8,12]$ ……………………12 分

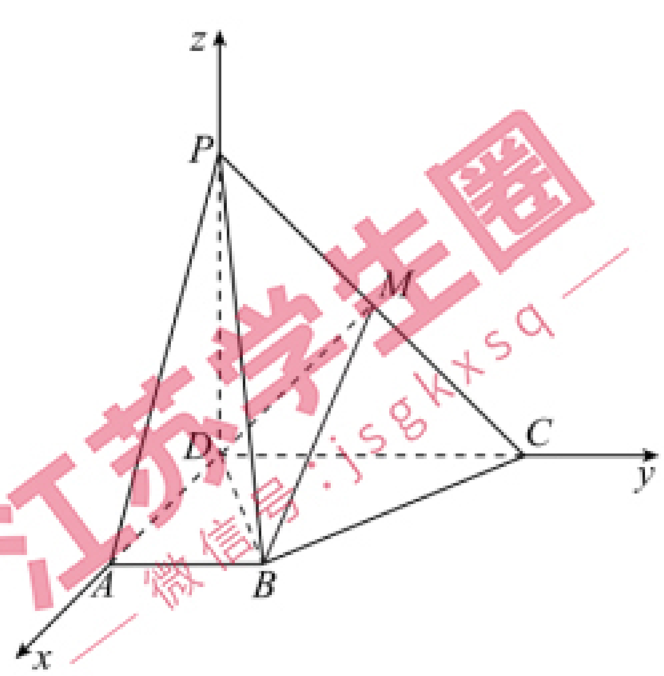
19.证：在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\because PD\perp$平面 $ABCD\therefore PD\perp AD$ ……………………1 分

$\because AB\perp DA$，$AB/\!/CD\therefore CD\perp AD$

又 $\because CD\cap PD=D$ $\quad\therefore AD\perp$平面 PCD ……………………3 分

又 $\because AD\subset$平面 $PAD\therefore$平面 $PAD\perp$平面 PCD ……………………5 分

（2）由（1）得 DA，DP，DC 两两垂直 $\therefore D$ 为原点，以 DA，DP，DC 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示空间直角坐标系 $Dxyz$，



则由题意：D（0，0，0），A（1，0，0），B（1，1，0），C（0，2，0），P（0，0，2），

$\overrightarrow{PC}=$（0，2，−2）

由$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$（$0\leqslant\lambda\leqslant1$）得 M（0，2λ，$2-2\lambda$），……………………6 分

∵$PD\perp$平面 PCD∴平面 $ABCD$ 的一个法向量为$\overrightarrow{DP}=$（0，0，2）

设 $\boldsymbol{n}=$（x，y，z）为平面 BDM 的一个法向量，$\overrightarrow{DB}=$（1，1，0），＝（0，2λ，$2-2\lambda$）

$$\therefore\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DM}=0\end{cases}\text{即}\begin{cases}x+y=0\\ 2\lambda y+(2-2\lambda)z=0\end{cases}$$

令 $x=1$，则 $y=-1$，$z=\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$，$\boldsymbol{n}=$（1，−1，$\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$）……………………8 分

∵二面角 $M-BD-A$ 的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\left|\dfrac{\frac{\lambda}{1-\lambda}}{\sqrt{2+\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^2}}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ ……………………10 分

设直线 BC 与平面 BDM 所成角为 θ，平面 BDM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=$（1，−1，1）

又$\overrightarrow{BC}=$（−1，1，0）

$\therefore\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，即直线 BC 与平面 BDM 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$……………………12 分

20.解：（1）由题意得$\cos\angle A_1BA_2=\dfrac{2(a^2+b^2)-4a^2}{2(a^2+b^2)}=-\dfrac{3}{5}$，可得$a^2=4b^2$，

又$2a-2b=4, b>0$，联立方程得：$a=4, b=2$，

故椭圆方程为$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$. ……………………4 分

（2）证明：∵$\left|\overrightarrow{A_1P}+\overrightarrow{A_1Q}\right|=\left|\overrightarrow{A_1P}-\overrightarrow{A_1Q}\right|$，根据向量加法与减法的几何意义可得 $A_1P\perp A_1Q$，

即$\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{A_1Q}=0$，……………………5 分

设直线 l 的方程为：$y=kx+m$，$k\neq0$ 联立椭圆方程$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$，

得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-16=0$，

$\Delta=64k^2m^2-4(1+4k^2)(4m^2-16)>0$,即$16k^2-m^2+4>0$

设$P(x_1,x_2),Q(x_2,y_2)$，则

$x_1+x_2=\dfrac{-8km}{1+4k^2},x_1\cdot x_2=\dfrac{4m^2-16}{1+4k^2}$, ……………………7 分

$\overrightarrow{A_1P}=(x_1+4,y_1),\overrightarrow{A_1Q}=(x_2+4,y_2)$，

$\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{A_1Q}=(x_1+4)(x_2+4)+y_1y_2=(x_1+4)(x_2+4)+(kx_1+m)(kx_2+m)$

$=(k^2+1)x_1x_2+(km+4)(x_1+x_2)+16+m^2=0$

将韦达定理式代入化简得，

$48k^2-32km+5m^2=0$,解得$m=\dfrac{12}{5}k$或$m=4k$, ……………………10 分

此时均满足$16k^2-m^2+4>0$，

当$m=4k$时，直线方程为$y=kx+4k=k(x+4)$，过点$(-4,0)$与A_1重合，故舍去，

当$m=\dfrac{12}{5}k$时，直线方程为$y=kx+\dfrac{12}{5}k=k(x+\dfrac{12}{5})$，过定点$(-\dfrac{12}{5},0)$，

故直线l过定点，定点为$(-\dfrac{12}{5},0)$. ……………………12 分

21. 解（1）由题意，这 600 辆车在 9:20~10:40 时间段内通过该收费点的时刻的平均值为$(30\times0.005+50\times0.015+70\times0.020+90\times0.010)\times20=64$，即 10 点 04 分

……………………3 分

（2）结合频率分布直方图和分层抽样的方法可知：抽取的 10 辆车中，在 10:00 前通过的车辆数就是位于时间分组中在$[20,60)$这一区间内的车辆数，即

$(0.005-0.015)\times20\times10=4$，所以$X$的可能取值为 0，1，2，3，4

所以$P(X=0)=\dfrac{C_6^4}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{14}$，$P(X=1)=\dfrac{C_6^3C_1^1}{C_{10}^4}=\dfrac{8}{21}$，$P(X=2)=\dfrac{C_6^2C_4^2}{C_{10}^4}=\dfrac{3}{7}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_6^1C_4^3}{C_{10}^4}=\dfrac{4}{35}$，$P(X=4)=\dfrac{C_6^0C_4^4}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{210}$，

所以X的分布列为

X	0	1	2	3	4

P	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

……………………6 分

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{14}+1\times\frac{8}{21}+2\times\frac{3}{7}+3\times\frac{4}{35}+4\times\frac{1}{210}=\frac{8}{5}$. ……………………8 分

（3）由（1）可得 $\mu=64$，

$\sigma^2=(30-64)^2\times0.1+(50-64)^2\times0.3+(70-64)^2\times0.4+(90-64)^2\times0.2=324$，

所以 $\sigma=18$. ……………………10 分

估计在 9:46~10:40 这一时间段内通过的车辆数，也就是 $46<T\le100$ 通过的车辆数，

由 $T\sim N(\mu,\sigma^2)$，

$$P(64-18<T\le64+2\times18)=\frac{P(\mu-\sigma<T\le\mu+\sigma)}{2}+\frac{P(\mu-2\sigma<T\le\mu+2\sigma)}{2}=0.8186$$

所以，估计在 9:46~10:40 这一时间段内通过的车辆数为 $1000\times0.8186\approx819$ 辆.

……………………12 分

22. 解（1） $F(x)=e^x-2x-b$，则 $F'(x)=e^x-2$.

令 $F'(x)=e^x-2>0$, 得 $x>\ln2$，所以 $F(x)$ 在 $(\ln2,+\infty)$ 上单调递增.

令 $F'(x)=e^x-2<0$, 得 $x<\ln2$，所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,\ln2)$ 上单调递减. ……………3 分

（2）因为 $f'(x)=e^x+2x-1$，所以 $f'(0)=0$，所以 l 方程为 $y=1$.

依题意， $-\frac{a}{2}=1$， $c=1$. 于是 l 与抛物线 $g(x)=x^2-2x+b$ 切于点 $(1,1)$，

由 $1^2-2+b=1$ 得 $b=2$.所以 $a=-2,b=2,c=1$. ……………………7 分

（3）设 $h(x)=f(x)-g(x)=e^x-(a+1)x-b$,则 $h(x)\ge0$ 恒成立.易得 $h'(x)=e^x-(a+1)$.

①当 $a+1\le0$ 时，

因为 $h'(x)>0$，所以此时 $h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

a)若 $a+1=0$，则当 $b\le0$ 时满足条件，此时 $a+b\le-1$；

b)若 $a+1<0$，取 $x_0<0$ 且 $x_0<\frac{1-b}{a+1}$，

此时 $h(x_0)=e^{x_0}-(a+1)x_0-b<1-(a+1)\frac{1-b}{a+1}-b=0$，所以 $h(x)\ge0$ 不恒成立.

不满足条件；

②当$a+1>0$时，

令$h'(x)=0$，得$x=\ln(a+1)$. 由$h'(x)>0$，得$x>\ln(a+1)$；

由$h'(x)<0$，得$x<\ln(a+1)$.

所以$h(x)$在$(-\infty,\ln(a+1))$上单调递减，在$(\ln(a+1),+\infty)$上单调递增.

要使得“$h(x)=e^x-(a+1)x-b\geq 0$恒成立”，必须有

“当$x=\ln(a+1)$时，$h(x)_{\min}=(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-b\geq 0$”成立.

所以$b\leq(a+1)-(a+1)\ln(a+1)$.则$a+b\leq 2(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-1$. ……………10

分

令$G(x)=2x-x\ln x-1,x>0$, 则$G'(x)=1-\ln x$.

令$G'(x)=0$，得$x=e$. 由$G'(x)>0$，得$0<x<e$；

由$G'(x)<0$，得$x>e$. 所以$G(x)$在$(0,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减,

所以，当$x=e$时，$G(x)_{\max}=e-1$.

从而，当$a=e-1,b=0$时，$a+b$的最大值为$e-1$. ……………………12分