2021—2022 学年高三总复习阶段性检测考试
数学(理)参考答案

1.【答案】C

【解析】依题意,$A=\{x|2^x>2^{-4}\}=\{x|x>-4\}$,而$\complement_U B=\{x|x\leqslant 2\}$,则$A\cap(\complement_U B)=\{x|-4<x\leqslant 2\}$,故选 C.

2.【答案】B

【解析】依题意,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,故$-2+2\lambda=0$,解得$\lambda=1$,故$\boldsymbol{a}=(2,1)$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,3)$,故$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$,故选 B.

3.【答案】C

【解析】若使用图(2)所示的哥隆尺,能够一次性测量的长度数据只有 8($9-1=8$),其余 3 个数据均无法一次性测量,故选 C.

4.【答案】B

【解析】依题意,圆台的体积$V=\frac{1}{3}\cdot(S_上+S_下+\sqrt{S_上 S_下})\cdot h=\frac{52\pi}{3}\cdot h=104\pi$,解得$h=6$,故圆台的母线长$l=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$,故选 B.

5.【答案】A

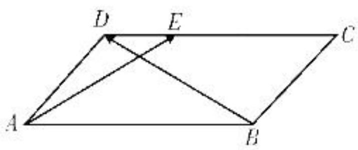
【解析】依题意,$f(-x)=2\sin 2(-x)+\sin 4(-x)=-2\sin 2x-\sin 4x=-f(x)$,故$f(x)$为奇函数,图象关于原点对称,排除 D;令$f(x)=0$,即$2\sin 2x+\sin 4x=2\sin 2x+2\sin 2x\cos 2x=0$,故$2\sin 2x(1+\cos 2x)=0$,则$\sin 2x=0$或$1+\cos 2x=0$,因为$x\in[-\pi,\pi]$,故由$\sin 2x=0$得$x=0$或$\pm\frac{\pi}{2}$或$\pm\pi$,由$1+\cos 2x=0$得$x=\pm\frac{\pi}{2}$,故$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上有 5 个零点,排除 B;而$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2>0$,排除 C,故选 A.

6.【答案】D

【解析】依题意,$\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)(a+b)=\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+5\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}+5=9$,当且仅当$b=2a$时等号成立,故实数$\lambda$的取值范围为$(-\infty,9]$,故选 D.

7.【答案】A

【解析】作出图形如下所示,$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AB}$,故$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}^2+(\lambda-1)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\lambda\overrightarrow{AB}^2=4+6(\lambda-1)-18\lambda=-6$,解得$\lambda=\frac{1}{3}$,故选 A.

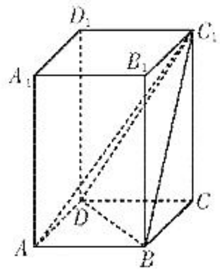


8.【答案】D

【解析】由正弦定理,$\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{CD}{\sin\angle CAD}$,即$\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sin\angle CAD}$,故$\sin\angle CAD=\frac{1}{2}$,则$\angle CAD=30^\circ$,故$\angle BAC=120^\circ$,由余弦定理,$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos 120^\circ}=2\sqrt{7}$,故选 D.

9.【答案】D

【解析】由三视图可知，该几何体为三棱锥 C_1-ABD，将该三棱锥置于长方体中如下图所示，可知该三棱锥的外接球即为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球，则外接球的直径 $2R=\sqrt{4^2+4^2+6^2}=2\sqrt{17}$，故所求外接球的表面积 $S=4\pi R^2=68\pi$，故选 D.

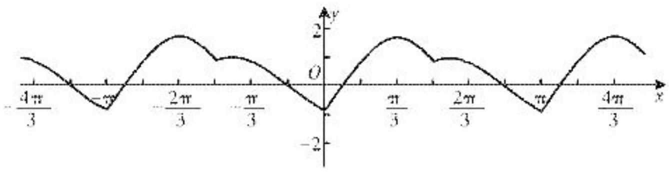


10.【答案】C

【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，故 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{3}+\dfrac{y_1^2}{2}=1,\\ \dfrac{x_2^2}{3}+\dfrac{y_2^2}{2}=1,\end{cases}$ 两式相减可得 $\dfrac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{3}+\dfrac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{2}=0$，则 $\dfrac{x_1-x_2}{3}+\dfrac{y_1-y_2}{3}=0$，故 $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-1$，故选 C.

11.【答案】C

【解析】依题意，$f(x+\pi)=|\sin 2(x+\pi)|+\sin\left[2(x+\pi)-\dfrac{\pi}{3}\right]=f(x)$，故 $f(x)$ 的一个周期为 π，当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)=\sin 2x+\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 时，$f(x)=-\sin 2x+\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，作出 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的图象，并拓展到 **R** 上，得到的图象如下所示，观察可知，p 为假命题，q 为假命题，故 $\neg p$，$p\vee\neg q$ 为真，故选 C.



12.【答案】A

【解析】设公共点为 $P(s,t)$，$y=e^{x-1}$ 的导数为 $y'=e^{x-1}$，在 $P(s,t)$ 处的切线斜率 $k=e^{s-1}$；$y=a\sqrt{x}$ 的导数为 $y'=\dfrac{a}{2\sqrt{x}}$，在 $P(s,t)$ 处的切线斜率 $k=\dfrac{a}{2\sqrt{s}}$. 因为在公共点处有公共切线，所以 $e^{s-1}=\dfrac{a}{2\sqrt{s}}$，且 $t=e^{s-1}$，$t=a\sqrt{s}$，所以 $\begin{cases}e^{s-1}=\dfrac{a}{2\sqrt{s}}\\ e^{s-1}=a\sqrt{s}\end{cases}$，即 $a\sqrt{s}=\dfrac{a}{2\sqrt{s}}$，解得 $s=\dfrac{1}{2}$，所以 $e^{\frac{1}{2}-1}=a\sqrt{\dfrac{1}{2}}$，解得 $a=\dfrac{\sqrt{2e}}{e}$，故选 A.

13.【答案】2

【解析】依题意，$f(\lambda)=\dfrac{10}{\lambda+1}=2$，解得 $\lambda=4$，故 $f(2)=\log_a 2+4=3$，故 $a=\dfrac{1}{2}$，从而 $a\lambda=\dfrac{1}{2}\times 4=2$.

14.【答案】$\sqrt{14}$

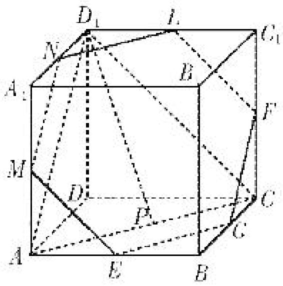
【解析】依题意，$1\times a+(-3)\times(-1)=0$，解得 $a=-3$，故 l_2：$3x+y-2=0$，则圆心 $C(2,1)$ 到 l_2 的距离 $d=\dfrac{|3\times2+1-2|}{\sqrt{10}}=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$，故所求弦长为 $2\times\sqrt{6-\dfrac{5}{2}}=\sqrt{14}$.

15.【答案】$a_n=3^n-n$

【解析】依题意，$a_{n+1}=3a_n+2n-1$，故 $a_{n+1}+(n+1)=3(a_n+n)$，则 $\dfrac{a_{n+1}+(n+1)}{a_n+n}=3$，又 $a_1+1=3$，故数列 $\{a_n+n\}$ 是首项为 3，公比为 3 的等比数列，故 $a_n+n=3^n$，即 $a_n=3^n-n$.

16.【答案】$\sqrt{6}$

【解析】依题意，$6AB^2=24$，故 $AB=2$，分别取 AB，BC，CC_1 的中点 E，G，F，则平面 LMN 即为平面 $LNMEGF$，易知平面 D_1AC∥平面 $LNMEGF$，故点 P 在直线 AC 上运动时，满足 D_1P∥平面 LMN，又 $\triangle ACD_1$ 是等边三角形，故当 P 是 AC 中点时，$D_1P\perp AC$，线段 D_1P 的长度取得最小值 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}AC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{6}$.



17. 解：(1) 设 C 的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

则 $\begin{cases}5+2D-E+F=0,\\45+6D+3E+F=0,\text{(2 分)}\\13-2D+3E+F=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}D=-4,\\E=-6,\text{故 }C\text{ 的一般方程为 }x^2+y^2-4x-6y-3=0,\\F=-3,\end{cases}$

化标准方程为 $(x-2)^2+(y-3)^2=16$.（5 分）

(2) 设 $3x-4y=z$，

则 C 的圆心 $(2,3)$ 到直线 $3x-4y-z=0$ 的距离满足 $d=\dfrac{|6-12-z|}{5}\leqslant4$，（7 分）

解得 $-26\leqslant z\leqslant14$，

故 $3x-4y$ 的取值范围为 $[-26,14]$.（10 分）

18. 解：(1) 依题意，$\dfrac{T}{2}=\dfrac{2\pi}{3}$，解得 $T=\dfrac{4\pi}{3}$，故 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{3}{2}$，

故 $f(x)=3\sin\left(\dfrac{3}{2}x+\varphi\right)$，（2 分）

因为 $f(0)=3\sin\varphi=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，所以 $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，则 $f(x)=3\sin\left(\dfrac{3}{2}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.（5 分）

(2) $g(x)=f(2x)=3\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$,(6 分)

若 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$,$3x\in[-\pi,0]$,$3x+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right]$,(8 分)

故 $\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$,则 $g(x)\in\left[-3,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$,

即 $g(x)$的值域为$\left[-3,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$.(12 分)

19. 解:(1)若选①:$\because c(c-b)=(2-b)(2+b)$,

$\therefore b^2+c^2-4=bc$,(2 分)

又$\because a=2$,$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-4}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$,(4 分)

$\because 0<A<\pi$,

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.(5 分)

若选②:$\because a=2$,$\therefore S=\frac{\sqrt{3}}{2}(2\cos C+c\cos A)c\cos A$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}(a\cos C+c\cos A)c\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}bc\cos A$,(2 分)

又$\because S=\frac{1}{2}bc\sin A$,

$\therefore \sin A=\sqrt{3}\cos A$,

$\therefore \tan A=\sqrt{3}$,(4 分)

$\because 0<A<\pi$,

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.(5 分)

若选③:$\because a=2$,$\therefore a\sin A=b\sin B+c(\sin C-\sin B)$,

由正弦定理得,$a^2=b^2+c^2-bc$,(2 分)

$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$,(4 分)

$\because 0<A<\pi$,

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.(5 分)

(2)$\because AM$ 是角 A 的平分线,

$\therefore \angle BAM=\angle CAM=\frac{\pi}{6}$,

$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABM}+S_{\triangle ACM}$,

即$\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}c\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}b\sin\frac{\pi}{6}$,

$\therefore bc=b+c$,(8 分)

由(1)知,$b^2+c^2-4=bc$,

解得 $b=c=2$.(12 分)

20. (1)证明:由 $HA=HB=HP=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=1$,得 $HA^2+HB^2=AB^2$,所以 $AD\perp BH$,(2 分)

又 $PH\perp AD$,$PH\cap BH=H$,所以 $AD\perp$ 平面 PBH,

因为 $AD/\!/BC$,所以 $BC\perp$ 平面 PBH.(4 分)

因为 $BC\subset$ 平面 PBC,所以平面 $PBC\perp$ 平面 PBH.(5 分)

(2)解:因为 $PB=\sqrt{2}$,所以 $HP^2+HB^2=PB^2$,$PH\perp BH$,

结合(1)可知 AD,BH,PH 两两相互垂直,以 H 为原点,HA 所在直线为 x 轴,HB 所在直线为 y 轴,HP 所在直线为 z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系.

所以 $H(0,0,0)$,$A(1,0,0)$,$B(0,1,0)$,$P(0,0,1)$,

所以 $\overrightarrow{AP}=(-1,0,1)$,$\overrightarrow{PB}=(0,1,-1)$,$\overrightarrow{AH}=(-1,0,0)$.(6 分)

设平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-x_1+z_1=0,\\ y_1-z_1=0.\end{cases}$

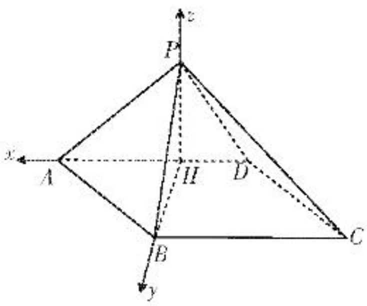
令 $x_1=1$,则 $y_1=z_1=1$,所以 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$.(8 分)

设平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AH}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-x_2=0,\\ y_2-z_2=0.\end{cases}$

令 $y_2=1$,则 $z_2=1$,$x_2=0$,所以 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$.(10 分)

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

故二面角 $A-PB-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.(12 分)



21. (1)证明:两边同时除以 $n(n+1)(n+2)$,得 $\frac{S_{n+1}}{(n+1)(n+2)}-\frac{S_n}{n(n+1)}=\frac{1}{3}$,(2 分)

又 $\frac{S_1}{1\times2}=\frac{1}{2}$,故 $\left\{\frac{S_n}{n(n+1)}\right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项,$\frac{1}{3}$ 为公差的等差数列.(3 分)

(2)解:由(1)可知,$\frac{S_n}{n(n+1)}=\frac{1}{3}(n-1)+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}n+\frac{1}{6}$,(4 分)

则 $S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.(5 分)

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)=n^2$,(7 分)

而 $a_1=1$ 符合上式,故 $a_n=n^2$.(8 分)

(3)证明:因为 $a_{2n+1}\cdot b_n=a_{2n}$,故 $b_n=\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}=\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2$,

且 $b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\cdots\cdot b_n=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\cdots\cdot\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2$,(9 分)

而 $b_n=\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2<\frac{4n^2}{4n^2+4n}=\frac{n}{n+1}$,(11 分)

故 $b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\cdots\cdot b_n<\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$.(12 分)

22. 解:(1)令 $f(x)=0$,故 $ae^x=x^2$,则 $a=\frac{x^2}{e^x}$,

令 $m(x)=\frac{x^2}{e^x}$,故 $m'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}=\frac{x(2-x)}{e^x}$,(2 分)

故当 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right)$时,$m'(x)>0$;当 $x\in(2,3]$时,$m'(x)<0$,

故 $m(x)$在$\left[\frac{1}{2},2\right)$上单调递增,在$(2,3]$上单调递减,(3 分)

而 $m\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{e}}{4e}$,$m(2)=\frac{4}{e^2}$,$m(3)=\frac{9}{e^3}$,(4 分)

故 $a=\frac{4}{e^2}$或$\frac{\sqrt{e}}{4e}\leqslant a<\frac{9}{e^3}$,故实数 a 的取值范围为$\left[\frac{\sqrt{e}}{4e},\frac{9}{e^3}\right)\cup\left\{\frac{4}{e^2}\right\}$.(5 分)

(2)依题意,$a>0$,$f(x)+x^2\geqslant\ln\frac{x-1}{ae}\Leftrightarrow ae^x-\ln(x-1)+\ln a+1\geqslant0$,

令 $g(x)=ae^x-\ln(x-1)+\ln a+1$,则 $g'(x)=ae^x-\frac{1}{x-1}$,(6 分)

而 $a>0$,易知 $g'(x)=ae^x-\frac{1}{x-1}$在$(1,+\infty)$上单调递增,

又因为 $x\to1$ 时,$g'(x)\to-\infty$;$x\to+\infty$ 时,$g'(x)\to+\infty$,

故存在唯一的 x_0,使得 $g'(x_0)=ae^{x_0}-\frac{1}{x_0-1}=0$,故 $ae^{x_0}=\frac{1}{x_0-1}$,(7 分)

则 $\ln a+x_0=-\ln(x_0-1)$,故 $g(x)_{\min}=g(x_0)=ae^{x_0}-\ln(x_0-1)+\ln a+1\geqslant0$,(8 分)

即$\frac{1}{x_0-1}+x_0+2\ln a+1\geqslant0$ 恒成立,

因为$\frac{1}{x_0-1}+x_0+2\ln a+1=\frac{1}{x_0-1}+(x_0-1)+2\ln a+2\geqslant2\sqrt{\frac{1}{x_0-1}\cdot(x_0-1)}+2\ln a+2=2\ln a+4$,

所以 $2\ln a+4\geqslant0$,故 $a\geqslant\frac{1}{e^2}$,

即实数 a 的取值范围为$\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$.(12 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。