2023届大湾区普通高中毕业班联合模拟考试

数学参考答案

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	C	B	A	B	C	A

二、选择题：本题共4小题，每小题5分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

题号	9	10	11	12
答案	AC	AD	BC	AC

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13．1　　14．-5　　15．$-\frac{1}{2}$　　16．$2\sqrt{3}$

四、解答题：本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（10分）

解答：(1) 由题可得 $a_1=3, a_2=7, a_3=11$，　　……2分

故 $a_n=3+4(n-1)=4n-1\,(n\in N^*)$．　　……4分

(2) $b_n=\dfrac{16}{(a_n+1)(a_{n+1}+5)}$ 且 $a_n=4n-1$，

故 $b_n=\dfrac{16}{4n(4n+4-1+5)}=\dfrac{1}{n(n+2)}$　　……5分

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$．　　……7分

$\therefore\ T_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$　　……8分

$=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\right)<\dfrac{3}{4}$．　　……10分

18.（12 分）

解：（1）由条件及正弦定理可得

$$(\sin B+\sin C)\cos A-\sin A\cos B-\sin A\cos C=0$$ ……1 分

即 $\sin B\cos A-\cos B\sin A+\sin C\cos A-\cos C\sin A=0$

故 $\sin(B-A)+\sin(C-A)=0$

则有 $\sin(B-A)=\sin(A-C)$ ……3 分

又 $B-A\in(-\pi,\pi),C-A\in(-\pi,\pi)$

故有 $B-A=A-C$ ，

或 $(B-A)+(A-C)=\pi$（舍去），

或 $(B-A)+(A-C)=-\pi$（舍去）． ……5 分

则 $B+C=2A$，又 $A+B+C=\pi$

所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. ……6 分

（2）设 $\angle ACB=\alpha$，在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理可得

$$\frac{BD}{\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})}=\frac{AD}{\sin(\frac{2\pi}{3}-\alpha)},\quad \frac{CD}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{AD}{\sin(\pi-\alpha)}$$ ……8 分

$$\therefore \frac{BD\cdot\sin(\frac{2\pi}{3}-\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})}=\frac{CD\cdot\sin(\pi-\alpha)}{\sin\frac{\pi}{4}}$$ ……9 分

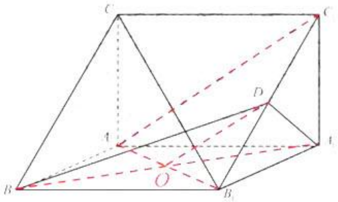
$$\therefore \frac{3\sin\frac{\pi}{4}}{\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})}=\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\sin(\frac{2\pi}{3}-\alpha)}$$ ……10 分

$$\therefore \frac{3}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}=\frac{\sin\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha}$$ ……11 分

$$\therefore \tan\alpha=-9-6\sqrt{3}$$ ……12 分

19.（12 分）

解：（1）连接 AB_1, A_1B 交于点 O，连接 OD ……2 分



$\because$ $ABC-A_1B_1C_1$ 为三棱柱

$\therefore$ ABB_1A_1 为平行四边形，点 O 为 AB_1 的中点

又$\because$ D 为 B_1C_1 的中点

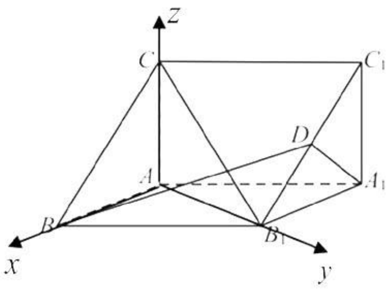
$\therefore$ $AC_1 \parallel OD$ ……4 分

又$\because$ $OD \subset$ 平面A_1BD，$AC_1 \not\subset$ 平面A_1BD

$\therefore$ $AC_1 \parallel$ 平面A_1BD． ……6 分

（2）解法 1 ：

$\because CA \perp AB \quad CA \perp AA_1 \quad AB \cap AA_1 = A$



$\therefore CA \perp$ 面 ABB_1A_1

$\because AB_1 \subset$ 面ABB_1A_1

$\therefore$ $CA \perp AB_1$，

$\therefore AB_1 = \sqrt{CB_1^{\ 2} - AC^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2$

$\because AB = 2, AB_1 = 2, BB_1 = 2\sqrt{2}$

$\therefore AB^2 + AB_1^{\ 2} = BB_1^{\ 2}$ 即 $AB \perp AB_1$ ……7 分

以 A 为坐标原点，AB, AB_1, AC 分别为 x, y, z 建立空间直角坐标系，

$A(0,0,0)$，$A_1(-2,2,0)$，$B(2,0,0)$，$B_1(0,2,0)$，$C_1(-2,2,2)$，$D(-1,2,1)$

$\therefore \overrightarrow{AA_1} = (-2,2,0) \quad \overrightarrow{A_1D} = (1,0,1)$ ……8 分

$\because AB \perp AB_1 \quad AB \perp AC \quad AB_1 \cap AC = A$

$\therefore AB \perp$ 面AB_1C 即平面 AB_1C 的一个法向量为$\overrightarrow{n_1} = (1,0,0)$ ……9 分

设平面 AA_1D 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\\ \overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+2y=0\\ x+z=0\end{cases}$

令 $x=1$，$y=1,z=-1\ \therefore\overrightarrow{n_2}=(1,1,-1)$ ……10 分

设平面 AB_1C 与平面 AA_1D 所成夹角为 θ，

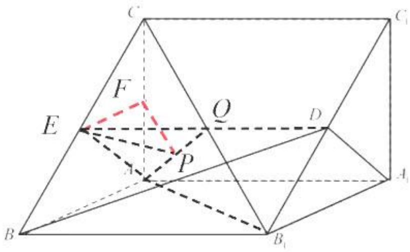
$\therefore\cos\theta=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{\left|1\times1+0\times1+0\times(-1)\right|}{1\times\sqrt{1+1+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ……11 分

$\therefore$ 平面 AB_1C 与平面 AA_1D 所成夹角的余弦值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$． ……12 分

解法 2： 设点 E 为 BC 的中点，点 F 为 AC 的中点，

连接 DE 交 B_1C 于点 Q，连接 AE,AQ,EF，

设点 P 为 AQ 的中点，连接 EP,FP．



$\because$ 点 E 为 BC 的中点，点 D 为 B_1C_1 的中点

$\therefore$ $EQ\parallel BB_1$ 且 $EQ=\dfrac{1}{2}BB_1=\sqrt{2}$，点 Q 为 B_1C 的中点

$\because$ ACC_1A_1 为矩形， $\therefore$ $AC\perp AA_1$

又 $\because$ $AC\perp AB$，$AB\cap AA_1=A$， $\therefore$ $AC\perp$ 平面 ABB_1A_1 ……7 分

$\therefore$ $AC\perp AB_1$

$\therefore$ 在 $\triangle ACB_1$ 中， $AC\perp AB_1, AC=2, B_1C=2\sqrt{2}$，可得 $AB_1=2$

$\therefore$ $\triangle AB_1C$ 为等腰直角三角形，其中 $AC=AB_1=2$，$B_1C=2\sqrt{2}$

而点 Q 为 B_1C 的中点， $\therefore$ $AQ\perp B_1C$ 且 $AQ=\sqrt{2}$ ……8 分

$\because$ 点 P 为 AQ 的中点，点 F 为 AC 的中点

$\therefore\ FP \parallel B_1C$ 且 $FP=\dfrac{1}{2}CQ=\dfrac{1}{4}B_1C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ FP \perp AQ$ ……9 分

又$\because$ 在$Rt\triangle ABC$中，$AB=AC=2$，点E为BC的中点

$\therefore\ AE=\sqrt{2}$

$\therefore$ 在$\triangle AEQ$中，$AE=EQ=AQ=\sqrt{2}$，且点P为AQ的中点

$\therefore\ EP\perp AQ$ 且 $EP=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore\ \angle EPF$ 即为平面 AB_1C 与平面 AA_1D 所成的夹角 ……10 分

$\therefore$ 在$\triangle EFP$中，$EF=\dfrac{1}{2}AB=1$，$FP=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$EP=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ……11 分

$\therefore\ \cos\angle EPF=\dfrac{EP^2+FP^2-EF^2}{2EP\cdot FP}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ……12 分

20.（12 分）

解：（1）由已知 $X\sim B(6,\dfrac{1}{2})$， ……2 分

所以 $P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$=C_6^0(\dfrac{1}{2})^6+C_6^1\dfrac{1}{2}\cdot(\dfrac{1}{2})^5+C_6^2(\dfrac{1}{2})^2\cdot(\dfrac{1}{2})^4=\dfrac{1}{64}+\dfrac{6}{64}+\dfrac{15}{64}=\dfrac{11}{32}$； ……5 分

（2）由已知 $X\sim B(n,\dfrac{1}{2})$，所以 $E(X)=0.5n$，$D(X)=0.25n$， ……7 分

若 $0.4\le\dfrac{X}{n}\le 0.6$，则 $0.4n\le X\le 0.6n$，即 $-0.1n\le X-0.5n\le 0.1n$，

即 $|X-0.5n|\le 0.1n$. ……8 分

由切比雪夫不等式 $P\left(|X-0.5n|\le 0.1n\right)\ge 1-\dfrac{0.25n}{(0.1n)^2}$， ……10 分

要使得至少有98%的把握使发射信号"1"的频率在 0.4 与 0.6 之间，则 $1-\dfrac{0.25n}{(0.1n)^2}\ge 0.98$，

解得 $n\ge 1250$，所以估计信号发射次数 n 的最小值为 1250. ……12 分

21.（12 分）

解：（1）令 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

$\because\ y^2=2x$，$\therefore\ y=\pm\sqrt{2x}$，$\therefore\ y'=\dfrac{1}{y}$，$\therefore\ k_{PA}=\dfrac{1}{y_1}$

$\therefore\ l_{PA}:y-y_1=\dfrac{1}{y_1}(x-x_1)$ ……2 分

又 $\because\ P(-1,-2)$

$\therefore\ l_{PA}:-2-y_1=\dfrac{1}{y_1}(-1-x_1)\Leftrightarrow y_1=\dfrac{1}{2}(1-x_1)$ ……3 分

$\therefore\ \begin{cases} y_1=\dfrac{1}{2}(1-x_1) \\ y_1^2=2x_1 \end{cases}\Rightarrow y_1=-2-\sqrt{6}$ ……4 分

同理可得 $y_2=-2+\sqrt{6}$. ……5 分

$\therefore\ y_1-y_2=-2\sqrt{6},\quad x_1-x_2=-2(y_1-y_2)=4\sqrt{6}$，

$\therefore\ |AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(4\sqrt{6})^2+(-2\sqrt{6})^2}=2\sqrt{30}$. ……6 分

（2）令 $C(x_3,y_3)$，由条件知 $y_1+y_2+y_3=0$. ……7 分

$\therefore\ \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BMN}}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC}{\frac{1}{2}\cdot BM\cdot BN\cdot\sin\angle ABC}=\dfrac{AB}{BM}\cdot\dfrac{BC}{BN}=(1+\dfrac{AM}{BM})\cdot(1+\dfrac{CN}{BN})$ ……8 分

$$=(1-\frac{y_1}{y_2})(1-\frac{y_3}{y_2})=1-\frac{y_1+y_3}{y_2}+\frac{y_1\cdot y_3}{y_2^2}$$

$$=2+\frac{y_1\cdot y_3}{y_2^2}=2+\frac{y_1(-y_1-y_2)}{y_2^2}=2+\frac{-y_1^2-y_1y_2}{y_2^2}$$

$$=-\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2-\left(\frac{y_1}{y_2}\right)+2=-\left(\frac{y_1}{y_2}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$ ……10 分

$\because\ 4|AM|<3|BM|$，$\therefore\ \frac{|AM|}{|BM|}=\frac{-y_1}{y_2}<\frac{3}{4}$

$\therefore\ -\frac{3}{4}<\frac{y_1}{y_2}<0$ ……11 分

$\therefore$ 当 $\frac{y_1}{y_2}=-\frac{1}{2}$ 时，$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BMN}}$ 取得最大值 $\frac{9}{4}$. ……12 分

22．（12 分）

解：（1）证明：（1）$f(x)=\frac{e^{x-1}}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ………1 分

$f'(x)=\frac{(x-1)e^{x-1}}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，得：$x=1$， ……… 2 分

当 x 变化时 $f'(x)$，$f(x)$ 的关系如下表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	\	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘		↗

$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,1)$ 上单调递减；在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ………4 分

（2）证明：要证 $a+b+\ln ab>2$，

只需证：$(a+\ln b)+(b+\ln a)>2$

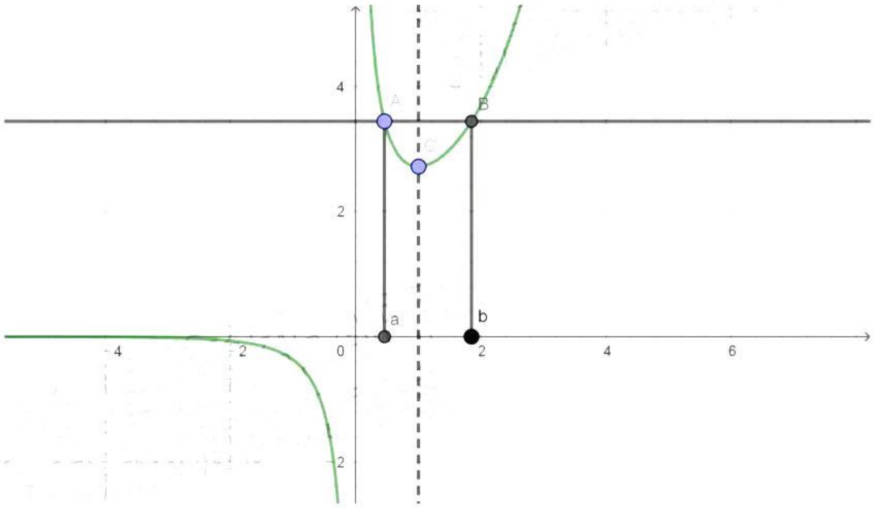
根据$a+\ln b=b+\ln a$，只需证：$b+\ln a>1$ ………6 分

不妨设$a<b$，由$a+\ln b=b+\ln a$得：$a-\ln a=b-\ln b$；

两边取指数，$e^{a-\ln a}=e^{b-\ln b}$，化简得：$\dfrac{e^a}{a}=\dfrac{e^b}{b}$ ………7 分

令：$g(x)=\dfrac{e^x}{x}$,则$g(a)=g(b)$，$g(x)=\dfrac{e\bullet e^{x-1}}{x}=ef(x)$,根据（1）得

$g(x)$在$(-\infty,0)$，$(0,1)$上单调递减；在$(1,+\infty)$上单调递增（如下图所示），



由于$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，要使$g(a)=g(b)$且$a\neq b$，则必

有$0<a<1,b>1$，即$0<a<1<b$

由$0<a<1<b$得：$b>1,1-\ln a>1$. ………8 分

要证$b+\ln a>1$，只需证：$b>1-\ln a$，

由于$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，要证：$b>1-\ln a$，

只需证：$g(b)>g(1-\ln a)$， …………9 分

又$g(a)=g(b)$，只需证：$g(a)>g(1-\ln a)$， …………10 分

只需证：$\frac{e^a}{a} > \frac{e^{1-\ln a}}{1-\ln a} = \frac{\frac{e}{a}}{1-\ln a}$，

只需证：$e^a\left(1-\ln a\right) > e$，

只需证：$\frac{1-\ln a}{e} > \frac{1}{e^a}$，

只需证：$\frac{1-\ln a}{e} - \frac{1}{e^a} > 0$，即证 $\frac{1-\ln a}{e} - e^{-a} > 0$，

令 $\varphi(x) = \frac{1-\ln x}{e} - e^{-x}, (0 < x < 1)$，$\varphi(1) = 0$，$\varphi(a) = \frac{1-\ln a}{e} - e^{-a}$

只需证：$\varphi(x) > 0, (0 < x < 1)$，

$\varphi'(x) = -\frac{1}{ex} + e^{-x} = -\frac{1}{ex} + \frac{1}{e^x} = -\frac{e^x - ex}{ex \cdot e^x}$，

令 $h(x) = e^x - ex$,

$h(1) = 0, h'(x) = e^x - e < 0, (0 < x < 1)$，$h(x)$在$(0,1)$上单调递减，

所以 $h(x) > h\left(1\right) = 0$，

所以 $\varphi'(x) = -\frac{e^x - ex}{ex \cdot e^x} < 0$

所以 $\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递减，所以 $\varphi(x) > \varphi\left(1\right) = 0$

所以 $\varphi(a) > 0$

所以：$a + b + \ln ab > 2$.　　　　……12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。