参照秘密级管理★启用前　　山东省日照市　　试卷类型：A

2020级高三上学期期末校际联合考试

数学试题

2023.1

考生注意：

1．答题前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束，将试题卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设集合 $A=\{x|1<2^x<16\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{2,3\}$　　B．$\{3,4\}$　　C．$\{2,3,4\}$　　D．$\{2,3,4,5\}$

2．设 a，b 为实数，若复数 $\dfrac{1+2i}{a+bi}=1+i$，则

A．$a=\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$　　B．$a=3$，$b=1$　　C．$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{3}{2}$　　D．$a=1$，$b=3$

3．设 $x\in\mathbf{R}$，则“$\dfrac{1}{x-2}<1$”是“$x>3$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．已知 m，n 是两条不重合的直线，α，β 是两个不重合的平面，则下列结论正确的是

A．若 $m\perp\alpha$，$n//\alpha$，则 $m//n$

B．若 $m//\alpha$，$\alpha//\beta$，则 $m//\beta$

C．若 $m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$m\perp n$，则 $\alpha\perp\beta$

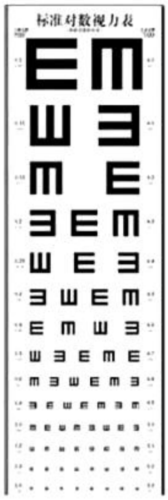
D．若 $\alpha\perp\beta$，$m//\alpha$，则 $m\perp\beta$

5. 若曲线 $y=-\sqrt{x+1}$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线与曲线 $y=\ln x$ 在点 P 处的切线垂直，则点 P 的坐标为

A．$(e,1)$　　B．$(1,0)$　　C．$(2,\ln 2)$　　D．$(\frac{1}{2},-\ln 2)$

6．我们要检测视力时会发现对数视力表中有两列数据，分别是小数记录与五分记录，如图所示（已隐去数据），其部分数据如表：

小数记录 x	0.1	0.12	0.15	0.2	…	?	…	1.0	1.2	1.5	2.0
五分记录 y	4.0	4.1	4.2	4.3	…	4.7	…	5.0	5.1	5.2	5.3



现有如下函数模型：① $y=5+\lg x$，② $y=5+\frac{1}{10}\lg\frac{1}{x}$，$x$ 表示小数记录数据，y 表示五分记录数据，请选择最合适的模型解决如下问题：小明同学检测视力时，医生告诉他的视力为4.7，则小明同学的小数记录数据为（附：$10^{-0.3}=0.5, 5^{-0.22}=0.7, 10^{-0.1}=0.8$）

A．0.3　　B．0.5　　C．0.7　　D．0.8

7．安排4名中学生参与社区志愿服务活动，有4项工作可以参与，每人参与1项工作，每项工作至多安排2名中学生，则不同的安排方式有

A．168种　　B．180种　　C．192种　　D．204种

8．已知 F_1，F_2 分别为双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的两个焦点，双曲线上的点 P 到原点的距离为 b，且 $\sin\angle PF_2F_1=3\sin\angle PF_1F_2$，则该双曲线的渐近线方程为

A．$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$　　B．$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$　　C．$y=\pm\sqrt{2}x$　　D．$y=\pm\sqrt{3}x$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的，全部选对得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．对于抛物线 $x^2=8y$，下列描述正确的是

A．开口向上，焦点为 $(0,2)$　　　　B．开口向上，焦点为 $(0,\frac{1}{16})$

C．焦点到准线的距离为 4　　　　D．准线方程为 $y=-4$

10．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+\frac{1}{a_n}$，则

A．$a_{n+1}\geq 2a_n$　　　　B．$\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$ 是递增数列

C．$\{a_{n+1}-4a_n\}$ 是递增数列　　　　D．$a_n\geq n^2-2n+2$

11．2022 年卡塔尔世界杯会徽（如图）正视图近似伯努利双纽线．在平面直角坐标系 xOy 中，把到定点 $F_1(-a,0)$，$F_2(a,0)$ 距离之积等于 $a^2(a>0)$ 的点的轨迹称为双纽线．已知点 $P(x_0,y_0)$ 是双纽线 C 上一点，下列说法中正确的有

A．双纽线 C 关于原点 O 中心对称

B．$-\frac{a}{2}\leq y_0\leq\frac{a}{2}$

C．双纽线 C 上满足 $|PF_1|=|PF_2|$ 的点 P 有两个

D．$|PO|$ 的最大值为 $\sqrt{2}a$

12．已知三棱锥 $A-BCD$ 的棱长均为 3，其内有 n 个小球，球 O_1 与三棱锥 $A-BCD$ 的四个面都相切，球 O_2 与三棱锥 $A-BCD$ 的三个面和球 O_1 都相切，如此类推，…，球 O_n 与三棱锥 $A-BCD$ 的三个面和球 O_{n-1} 都相切($n\geq 2$，且 $n\in\mathbf{N}^*$)，球 O_n 的表面积为 S_n，体积为 V_n，则

A．$V_1=\frac{\sqrt{6}}{8}\pi$　　　　B．$S_3=\frac{3\pi}{16}$

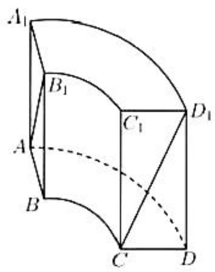
C．数列 $\{S_n\}$ 为等差数列　　　　D．数列 $\{V_n\}$ 为等比数列

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．二项式$(x-\frac{a}{x})^6$的展开式中常数项为-20，则a的值为______.

14．已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$夹角为$\frac{\pi}{4}$，且$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，则$|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=$______.

15．在中国古代数学著作《九章算术》中记载了一种称为“曲池”的几何体，该几何体的上、下底面平行，且均为扇环形（扇环是指圆环被扇形截得的部分）．现有一个如图所示的曲池，它的高为2，AA_1，BB_1，CC_1，DD_1均与曲池的底面垂直，底面扇环对应的两个圆的半径分别为1和2，对应的圆心角为$90°$，则图中异面直线AB_1与CD_1所成角的余弦值为______.



16．设正项等比数列a_1，$a_2,\cdots$，a_5的公比为q，首项$a_1=1$，关于x的方程$a_kx^2+2x+a_k=0$有两个不相等的实根x_1，x_2，且存在唯一的$a_k\,(k=1,2,\cdots,5)$，使得$|x_1-x_2|<2\sqrt{15}$．则公比q的取值范围为______.

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

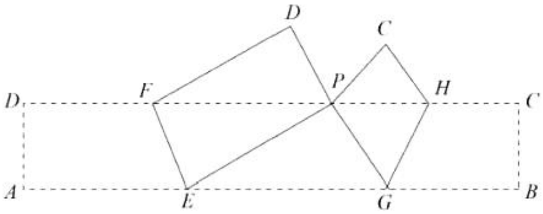
已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x\cos x$.

（1）求函数$f(x)$的单调增区间;

（2）将函数$y=f(x)$图象上点的横坐标伸长为原来的2倍（纵坐标不变），再把所得函数图象向下平移$\frac{\sqrt{3}}{2}$个单位得到函数$g(x)$的图象，求$g(x)$的最小值及取得最小值时x的取值集合.

18.（12 分）

如图，长方形 $ABCD$ 纸片的长 AB 为 $3+\sqrt{7}$，将矩形 $ABCD$ 沿折痕 EF,GH 翻折，使得 A,B 两点均落于 DC 边上的点 P，若 $EG=\sqrt{7},\angle EPG=\theta$.



（1）当 $\sin 2\theta=-\sin\theta$ 时，求长方形宽 AD 的长度；

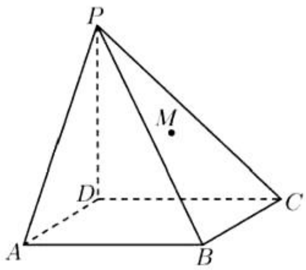
（2）当 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 时，求长方形宽 AD 的最大值.

19.（12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为正方形，$PD\perp$ 平面$ABCD$，$PD=AD=2$，M 是侧面 PBC 上一点.

（1）过点 M 作一个截面 α，使得 PA 与 BC 都与 α 平行．作出 α 与四棱锥 $P-ABCD$ 表面的交线，并证明；

（2）设 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BP}$，其中 $\lambda\in[0,\frac{1}{2}]$．若 PB 与平面 MCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$，求 λ 的值.



20.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$的各项均为非零实数，其前 n 项和为 $S_n(S_n\neq 0)$，且 $S_n\cdot a_{n+2}=S_{n+1}\cdot a_n$.

（1）若 $S_3=2$，求 a_3 的值；

（2）若 $a_1=a$，$a_{2023}=2023a$，求证：数列$\{a_n\}$是等差数列，并求其前 n 项和.

21.（12分）

设椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为$F_1,F_2$，椭圆的上顶点$B(0,\sqrt{3})$，点$A$为椭圆$C$上一点，且$3\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}=\mathbf{0}$.

（1）求椭圆C的离心率及其标准方程；

（2）圆C'圆心在原点O，半径为$\sqrt{2}$，过原点O的直线l与椭圆C交于M,N两点，椭圆上一点P满足$OP\perp MN$，试说明直线PM,PN与圆C'的位置关系，并证明.

22.（12分）

已知函数$f(x)=\sin x-a\mathrm{e}^{\pi-x}$，$f'(x)$是$f(x)$的导函数.

（1）若$f(x)\geq 0$在$(-\pi,\pi)$上恒成立，求实数a的取值范围；

（2）若$f'(\pi)=0$，判断关于x的方程$f(x)=-1$在$[(2k+1)\pi,(2k+2)\pi](k\in\mathbf{N}^*)$内实数解的个数，并说明理由.

2020 级高三上学期期末校际联合考试

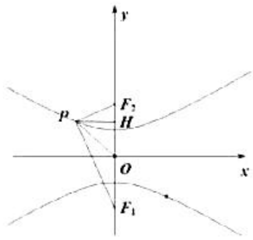
数学试题答案

2023.1

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1-4 AABC 5-8 DBDA

8.【答案】A【解析】设 F_1 为双曲线的下焦点，F_2 为双曲线的上焦点，绘出双曲线的图像，



如图，过点 P 作 $PH\perp F_1F_2$ 于点 H，因为 $\sin\angle PF_2F_1=3\sin\angle PF_1F_2$，

所以 $\dfrac{|PH|}{|PF_2|}=3\times\dfrac{|PH|}{|PF_1|}$，$|PF_1|=3|PF_2|$，因为 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，所以 $|PF_2|=a$，

因为双曲线上的点 P 到原点的距离为 b，即 $|PO|=b$，且 $|OF_2|=c$，

所以 $|PF_2|^2+|PO|^2=a^2+b^2=c^2=|OF_2|^2$，$\angle OPF_2=90^\circ$，

故 $\dfrac{1}{2}\times|OP|\times|PF_2|=\dfrac{1}{2}\times|OF_2|\times|HP|$，$|HP|=\dfrac{ab}{c}$，

因为 $|HO|^2+|HP|^2=|OP|^2$，所以 $|HO|=\dfrac{b^2}{c}$，$P(-\dfrac{ab}{c},\dfrac{b^2}{c})$，

将 $P(-\dfrac{ab}{c},\dfrac{b^2}{c})$ 代入双曲线 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ 中，即 $\dfrac{(\frac{b^2}{c})^2}{a^2}-\dfrac{(-\frac{ab}{c})^2}{b^2}=1$，化简得 $b^4-a^4=a^2c^2$，$b^4-a^4=a^2\ \ a^2+b^2$，

所以 $b^2+a^2\ \ b^2-a^2\ =a^2\ \ a^2+b^2$，即 $b^2-a^2=a^2$，$b^2=2a^2$，

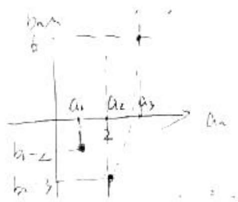
则该双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{a}{b}x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，故选：A.

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的，全部选对得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.AC 10.ABD 11.ABD 12. AD

10.【答案】ABD【解析】对于 A，因为 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+\dfrac{1}{a_n}\geq 2$，所以；$a_{n+1}\geq 2a_n$

对于 B，因为 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$，所以是 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ 递增数列；C 选项：



因为 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$，所以 $a_{n+1}=a_n{}^2+1$，易知 $\{a_n\}$ 是递增数列；

又 $a_{n+1}-4a_n=a_n{}^2+1-4a_n=(a_n-2)^2-3$，令 $b_n=(a_n-2)^2-3$，

如图所示：当 $n\geq 2$ 时，$\{b_n\}$ 递增，即 $a_{n+1}-4a_n$ 递增

对于 D 项：$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$，故 $a_{n+1}=a_n^2+1$，$a_n\geq 1$，又 $a_{n+1}=a_n^2+1\geq a_n+1$，即 $a_{n+1}-a_n\geq 1$，

由同向不等式的加法可得，$a_n \ge n$，故$a_{n+1}=a_n^2+1\ge n^2+1$，

$a_n \ge (n-1)^2+1=n^2-2n+2$成立，当$n=1$时，不等式成立，故D正确.

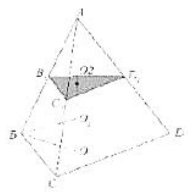
11.【答案】ABD【解析】$PF_1\cdot PF_2=\sqrt{(x_0+a)^2+y_0^2}\sqrt{(x_0-a)^2+y_0^2}=a^2$

$\therefore$双纽线$\left[(x+a)^2+y^2\right]\left[(x-a)^2+y^2\right]=a^4$关于原点$O$对称，$A$对.

$x^4-2a^2x^2+a^4+2x^2y^2+2a^2y^2+y^4-a^4=0$, $x^4+\left(2y^2-2a^2\right)x^2+2a^2y^2+y^4=0$

$\Delta=\left(2y^2-2a^2\right)^2-4\left(2a^2y^2+y^4\right)\ge 0$，$\therefore 0\le y^2\le \frac{a^2}{4}$，$\therefore -\frac{a}{2}\le y\le \frac{a}{2}$，$B$对.

$PF_1=PF_2$，则$x_0=0, y_0=0$只有一个点满足条件，C错.



$\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right), \overrightarrow{PO}^2=\frac{1}{4}\left(PF_1^2+2PF_1PF_2\cos\angle F_1PF_2+PF_2^2\right)$

由余弦定理知$4a^2=PF_1^2-2PF_1PF_2\cos\angle F_1PF_2+PF_2^2$

$\therefore PO^2=a^2+PF_1PF_2\cos\angle F_1PF_2=a^2+a^2\cos\angle F_1PF_2\le 2a^2$

$\therefore PO\le\sqrt{2}a$，$D$对，选$ABD$.

B另解：$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}PF_1\cdot PF_2\sin\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot|y_0|\therefore |y_0|=\frac{a}{2}\sin\angle F_1PF_2\le\frac{a}{2}$，$\therefore -\frac{a}{2}\le y_0\le\frac{a}{2}$.

12.【答案】AD【解析】如图所示，AO是三棱锥$A-BCD$的高，O是三角形BCD的外心，设

$BC=a$，则$OB=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，$AO=\sqrt{a^2-(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，$O_1$是三棱锥$A-BCD$的外接球和内切球球心，$O_1$在$AO$上，

设外接球的半径为R，内切球半径为r_1，则由$O_1B^2=OO_1^2+BO^2$得，$R^2=(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2+(\frac{\sqrt{6}}{3}a-R)^2$，

解得$R=\frac{\sqrt{6}}{4}a$，所以$r_1=AO-AO_1=AO-R=\frac{\sqrt{6}}{3}a-\frac{\sqrt{6}}{4}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a$，

则$r_1=\frac{1}{4}AO$,所以$r_1=\frac{\sqrt{6}}{4}$，$V_1=\frac{4}{3}\pi r_1^3=\frac{\sqrt{6}}{8}\pi$，

过AO的中点作与底面BCD平行的平面，与三条棱AB, AC, AD交于点B_1, C_1, D_1，

则平面$B_1C_1D_1$与球O_1相切，由题意知球O_2是三棱锥$A-B_1C_1D_1$的内切球，

又三棱锥$A-B_1C_1D_1$的棱长是三棱锥$A-BCD$棱长的$\frac{1}{2}$，所以其内切球半径$r_2=\frac{1}{2}r_1$，

同理，球O_n的半径为r_n，则$\{r_n\}$是公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，所以$r_1=\frac{\sqrt{6}}{4}$，$r_n=\frac{\sqrt{6}}{2^{n+1}}$，

$S_3 = 4\pi r_3^2 = \dfrac{3\pi}{32}$，

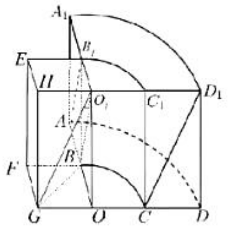
所以数列$\{S_n\}$是公比为$\dfrac{1}{4}$的等比数列， 数列$\{V_n\}$是公比为$\dfrac{1}{8}$等比数列。

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．1 14. $\sqrt{10}$ 15. $\dfrac{4}{5}$ 16. $(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}]$

15.【解析】方法一：延长AB,DC交于O，A_1B_1,D_1C_1交于O_1，连接OO_1，以矩形OO_1B_1B为侧面构造正四棱柱$FGOB-EHO_1B_1$，则$GO_1//CD_1$，$BO_1//AB_1$

所以$\angle BO_1G$为异面直线AB_1与CD_1所成角



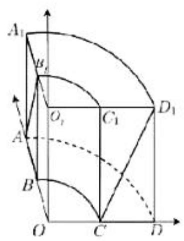
在ΔBO_1G中，$O_1B=O_1G=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$BG=\sqrt{2}$

所以$\cos\angle BO_1G=\dfrac{O_1B^2+O_1G^2-GB^2}{2O_1B\cdot O_1G}=\dfrac{5+5-2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$

所以异面直线AB_1与CD_1所成角的余弦值为$\dfrac{4}{5}$.

方法二：设上底面圆心为O_1，下底面圆心为O，连接OO_1,OC,OB

以O为原点，分别以OC,OB,OO_1所在直线为x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系则$C(1,0,0),A(0,2,0),B_1(0,1,2),D_1(2,0,2)$,



则$\overrightarrow{CD_1}=(1,0,2),\overrightarrow{AB_1}=(0,-1,2)$,

$\cos\left\langle\overrightarrow{CD_1},\overrightarrow{AB_1}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{CD_1}\cdot\overrightarrow{AB_1}}{\left|\overrightarrow{CD_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB_1}\right|}=\dfrac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4}{5}$,又异面直线所成角的范围为$(0,\dfrac{\pi}{2}]$,故

异面直线AB_1与CD_1所成角的余弦值为$\dfrac{4}{5}$.（建议用几何法解决）

16.【解析】依题意，等比数列a_1，a_2，…，a_5，首项$a_1=1$，所以$a_k\neq0$，
由于一元二次方程$a_kx^2+2x+a_k=0$的两根为x_1,x_2，

所以$\Delta=4-4a_k^2>0,0<a_k<1$，且$x_1+x_2=-\dfrac{2}{a_k},x_1x_2=1$，由$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\dfrac{4}{a_k^2}-4}<2\sqrt{15}$，

得$\dfrac{4}{a_k^2}-4<60,\dfrac{1}{a_k^2}<16,a_k>\dfrac{1}{4}$．所以$\dfrac{1}{4}<a_k<1$，可得数列$a_1,a_2,\cdots,a_5$的公比$0<q<1$，故为递减数列

因为存在唯一的$a_k(k=1,2,\cdots,5)$，使得$|x_1-x_2|<2\sqrt{15}$，

$k=1$显然不适合，若$k\geq3$，则$a_2>a_3$，因为$\dfrac{1}{4}<a_k<1$，故$\dfrac{1}{4}<a_2<1$，此时存在至少两项使得

$|x_1-x_2|<2\sqrt{15}$，不合题意．故$k=2$，即$\dfrac{1}{4}<a_2<1$，且$0<a_3\leq\dfrac{1}{4}$，故$\dfrac{1}{4}<a_1q<1$且$0<a_1q^2\leq\dfrac{1}{4}$，解得

$\dfrac{1}{4}<q\leq\dfrac{1}{2}$

则公比q的取值范围为$(\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17．解:（1）因为$f(x)=\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2x)+\frac{1}{2}\sin 2x$

$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$，…………………………3 分

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，得$-\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in Z$，

所以$f(x)$的单调增区间为$\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right],k\in Z$. …………………………5 分

（2）将函数$y=f(x)$图象上点的横坐标伸长为原来的2倍（纵坐标不变），再把所得函数图象向下平移$\frac{\sqrt{3}}{2}$个单位得到函数$g(x)$的图象，

所以$g(x)=\sin\left(2\times\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，…………………………7 分

故当$x-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，即$x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi,k\in Z$时，$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$，即$g(x)$取得最小值$-1$，

所以$g(x)$的最小值为-1，此时x的取值集合为$\left\{x\middle|x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi,k\in Z\right\}$.………10 分

18. 解：（1）当$\sin 2\theta=-\sin\theta$时，$2\sin\theta\cos\theta=-\sin\theta\Rightarrow\cos\theta=-\frac{1}{2},\theta=\frac{2\pi}{3}$……1 分

$\because EG=\sqrt{7}$，设$PE=AE=x,PG=BG=y,\therefore x+y=3$，①

$x^2+y^2-2xy\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=7\Rightarrow x^2+y^2+xy=7$，② …………………………4 分

$①^2-②\Rightarrow xy=2,\therefore S_{\triangle PEG}=\frac{1}{2}xy\cdot\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot AD\Rightarrow AD=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.……6 分

（2）在$\triangle PEG$中，$PE=AE=x,PG=BG=y,x+y=3$①

$x^2+y^2-2xy\cos\theta=7$②

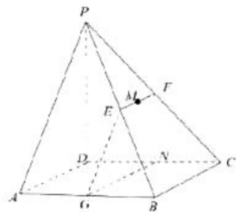
$①^2-②\Rightarrow 2xy(1+\cos\theta)=2,\therefore xy=\frac{1}{1+\cos\theta}$ ……………9 分

$S_{\triangle PEG}=\frac{1}{2}xy\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot AD\Rightarrow AD=\frac{\sin\theta}{\sqrt{7}(1+\cos\theta)}=\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1+2\cos^2\frac{\theta}{2}-1}=\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{7}}$

$\because 0<\theta\le\frac{\pi}{2},\therefore 0<\frac{\theta}{2}\le\frac{\pi}{4},0<\tan\frac{\theta}{2}\le 1,\therefore (AD)_{\max}=\frac{1}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$. ……………12 分

19. 解：(1) 过点M作BC的平行线，分别交PB,PC于点E,F，过点E作PA的平行线，交AB于点G，过G作BC的平行线，交DC于点N，连接FN，因为$GN//EF$，所以平面$EFNG$就是截面α．……………3 分

证明：因为$AP//EG$，$EG\subset$平面$EFNG$，$AP\not\subset$平面$EFNG$，
故$AP//$平面$EFNG$，即$AP//$平面α；同理可证$BC//$平面α.…………6 分

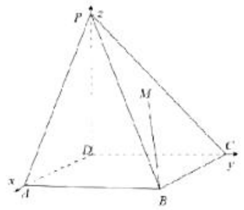


(2) 以点D作为坐标原点，建立如下图所示的空间直角坐标系

$B(2,2,0),C(0,2,0),P(0,0,2),D(0,0,0)$，设$M(x,y,z)$

$\because \overrightarrow{BM}=(x-2,y-2,z),\overrightarrow{BC}=(-2,0,0),\overrightarrow{BP}=(-2,-2,2)$

$\therefore (x-2,y-2,z)=(-2\lambda-1,-1,1)$，则 $x=1-2\lambda,y=1,z=1$，即$M(1-2\lambda,1,1)$ ……………8 分



$\because \overrightarrow{DC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{MC}=(2\lambda-1,1,-1)$，设平面$MCD$的法向量为$\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{MC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(2\lambda-1)x_1+y_1-z_1=0\\ 2y_1=0\end{cases}$，取$x_1=1$，则$z_1=2\lambda-1,y_1=0$

即$\vec{n}=(1,0,2\lambda-1)$， ……………10 分

设PB与平面MCD所成角为θ

$\sin\theta=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}|}{|\overrightarrow{BP}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|2\lambda-2|}{\sqrt{3}\times\sqrt{4\lambda^2-4\lambda+2}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，整理得$8\lambda^2+2\lambda-1=0$

解得$\lambda=-\frac{1}{2}$（舍），$\lambda=\frac{1}{4}$ ……………12 分

20. 解：(1) 由$\frac{S_n}{S_{n+1}}=\frac{a_n}{a_{n+2}}$，令$n=1$，得$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a_1}{a_3}$，$S_2=a_3$， ……………2 分

因为数列$\{a_n\}$的各项均为非零实数，所以$S_2=a_1+a_2=a_3$，

又$S_3=a_1+a_2+a_3=2a_3=2$，

所以，$a_3=1$；…………………………5 分

(2) 由$\frac{S_n}{S_{n+1}}=\frac{a_n}{a_{n+2}}$得：

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a_1}{a_3}$，$\frac{S_2}{S_3}=\frac{a_2}{a_4}$，$\frac{S_3}{S_4}=\frac{a_3}{a_5}$，……，$\frac{S_{n-1}}{S_n}=\frac{a_{n-1}}{a_{n+1}}$，相乘得：$\frac{S_1}{S_n}=\frac{a_1a_2}{a_na_{n+1}}$，

因为数列$\{a_n\}$的各项均为非零实数，所以$a_2S_n=a_na_{n+1}$，

当$n\geq 2$时：$a_2S_{n-1}=a_{n-1}a_n$，所以$a_2S_n-a_2S_{n-1}=a_na_{n+1}-a_{n-1}a_n$，

即$a_2(S_n-S_{n-1})=a_n(a_{n+1}-a_{n-1})$，

即$a_2a_n=a_n(a_{n+1}-a_{n-1})$，

因为$a_n\neq 0$，所以$a_{n+1}-a_{n-1}=a_2$，　……………………………8分

所以$a_3-a_1=a_2$，$a_4-a_2=a_2$，

所以数列$\{a_{2n-1}\}$是等差数列，首项为a_1，公差为a_2，

所以数列$\{a_{2n}\}$是等差数列，首项为a_2，公差为a_2，

$a_{2023}=a_1+1011a_2=2023a$，所以$a_2=2a_1=2a$，

所以$a_{2n-1}=a_1+(n-1)a_2=(2n-1)a_1=(2n-1)a$，

$a_{2n}=a_2+(n-1)a_2=2na_1=2na$，　……………10分

所以$a_n=na$，所以$a_{n+1}-a_n=a$，所以数列$\{a_n\}$是等差数列，

$S_n=\frac{n(n+1)}{2}a$。　……………………………12分

21. 解：（1）设$A(x_0,y_0)$，$B(0,\sqrt{3})$，$F_1(-c,0)$. 由$3\overrightarrow{F_1A}+\overrightarrow{F_1B}=0$

得$\begin{cases}3x_0+4c=0,\\3y_0+\sqrt{3}=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x_0=-\frac{4c}{3},\\y_0=-\frac{\sqrt{3}}{3},\end{cases}$，即得$A(-\frac{4c}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3})$，

又因为$A(x_0,y_0)$在椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上，　得$\frac{(-\frac{4c}{3})^2}{a^2}+\frac{(-\frac{\sqrt{3}}{3})^2}{3}=1$，

得$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即椭圆$C$的离心率为$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.　……………3分

又$b=\sqrt{3}$，所以椭圆　$C:\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$　…………………………5分

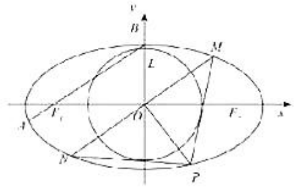
（2）因为M,N关于原点对称，$|\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{ON}|$，$OP\perp MN$，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{MN}=0$，所以$|PM|=|PN|$，

设$M(x_1,y_1)$，$P(x_2,y_2)$.

当直线PM的斜率存在时，设直线PM的方程为$y=kx+m$.

由直线和椭圆方程联立得$x^2+2(kx+m)^2=6$，即$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-6=0$，

所以 $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-4km}{1+2k^2} \\ x_1x_2=\dfrac{2m^2-6}{1+2k^2} \end{cases}$. ……………7 分



因为 $\overrightarrow{OM}=(x_1,y_1)$，$\overrightarrow{OP}=(x_2,y_2)$，

所以 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OP}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)$

$=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

$=(1+k^2)\dfrac{2m^2-6}{1+2k^2}+km\dfrac{-4km}{1+2k^2}+m^2=\dfrac{3(m^2-2k^2-2)}{2k^2+1}=0$ ……………9 分

所以 $m^2-2k^2-2=0$，$m^2=2k^2+2$，所以 $\dfrac{m^2}{k^2+1}=2$，$\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}$，

又因为圆 C' 的圆心 O 到直线 PM 的距离为 $\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2}=r$，

所以直线 PM 与圆 C' 相切.

当直线 PM 的斜率不存在时，依题意得 $N(-x_1,-y_1)$，$P(x_1,-y_1)$.

由 $|PM|=|PN|$ 得 $|2x_1|=|2y_1|$，所以 $x_1^2=y_1^2$，结合 $\dfrac{x_1^2}{6}+\dfrac{y_1^2}{3}=1$ 得 $x_1^2=2$，

所以直线 PM 到原点 O 的距离都是 $\sqrt{2}$，所以直线 PM 与圆 C' 也相切.

同理可得，直线 PN 与圆 C' 也相切.

所以直线 PM,PN 与圆 C' 相切. ……………………………12 分

22．解:（1）$f(x)=\sin x-ae^{\pi-x}\geq 0$，即 $ae^{\pi}\leq e^x\sin x$，令 $m(x)=e^x\sin x$，

$m'(x)=e^x(\sin x+\cos x)$, ……………1 分

当 $x\in(-\pi,\pi)$ 时，

令 $m'(x)=e^x(\sin x+\cos x)\geq 0$, 得 $-\dfrac{\pi}{4}\leq x\leq\dfrac{3\pi}{4}$，

$m'(x)=e^x(\sin x+\cos x)\leq 0$, 得 $-\pi<x\leq-\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{3\pi}{4}\leq x<\pi$，

所以 $m(x)=e^x\sin x$ 在 $(-\pi,-\dfrac{\pi}{4}]$ 和 $[\dfrac{3\pi}{4},\ \pi)$ 上为减函数，

在 $[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}]$ 上为增函数， ……………3 分

$m(\pi)=e^{\pi}\sin\pi=0$，故 $m(x)_{\min}=m(-\dfrac{\pi}{4})=e^{(-\frac{\pi}{4})}\sin(-\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{(-\frac{\pi}{4})}$，

$ae^{\pi}\leq-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{(-\frac{\pi}{4})}$，即 $a\leq-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{(-\frac{5\pi}{4})}$；综上 $a\leq-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{(-\frac{5\pi}{4})}$. ……………5 分

（2）$f'(x)=\cos x+ae^{\pi-x}$, $f'(\pi)=-1+a=0\Rightarrow a=1$ ……………6 分

由 $f(x)=-1$ 得，$\therefore\sin x-e^{\pi-x}+1=0$，

令 $s(x)=\sin x-e^{\pi-x}+1, s'(x)=\cos x+e^{\pi-x}$，令 $g(x)=\cos x+e^{\pi-x}$，

$g'(x)=-\sin x-e^{\pi-x},h(x)=-\sin x-e^{\pi-x},h'(x)=-\cos x+e^{\pi-x},h'(x)$ 在 $\left[(2k+1)\pi,(2k+2)\pi\right]$ 上单调递减，注意到 $h'((2k+1)\pi)=1+e^{-2k\pi}>0,h'((2k+2)\pi))=-1+e^{-\pi-2k\pi}<0$

$\therefore$ 存在 $x_0\in((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)$ 使 $h'(x_0)=0$，

且当 $(2k+1)\pi\le x<x_0$ 时，$h'(x)>0,g'(x)$ 单调递增；

当 $x_0<x\le(2k+2)\pi$ 时，$h'(x)<0,g'(x)$ 单调递减.

且 $g'((2k+1)\pi)=-e^{-2k\pi}<0,g'((2k+2)\pi)=-e^{-\pi-2k\pi}<0$

$g'\left(\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi\right)=1-e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}>0$，　　　　……………9 分

$\therefore g'(x)$ 在 $\left((2k+1)\pi,\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi\right)$ 和 $\left(\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi,(2k+2)\pi\right)$ 上各有一个零点 x_1,x_2

且当 $(2k+1)\pi\le x<x_1$ 时，$s'(x)$ 单调递减；$x_1<x<x_2$ 时，$s'(x)$ 单调递增，

当 $x_2<x\le(2k+2)\pi$ 时，

$s'(x)$ 单调递减且 $s'((2k+1)\pi)=-1+e^{-2k\pi}<0,s'((2k+2)\pi)=1+e^{-\pi-2k\pi}>0$

$\therefore$ 当 $(2k+1)\pi\le x\le x_1$ 时，$s'(x)<s'((2k+1)\pi)<0$；

当 $x_2<x\le(2k+2)\pi$ 时，$s'(x)>s'((2k+2)\pi)>0$.

$s'(x)$ 在 (x_1,x_2) 上有唯一的零点 x_3

且当 $(2k+1)\pi<x<x_3$ 时，$s'(x)<0,s(x)$ 单调递减；当 $x_3<x<(2k+2)\pi$ 时，$s'(x)>0,s(x)$ 单调递增.

注意到 $s((2k+1)\pi)=-e^{-2k\pi}+1>0,s((2k+2)\pi)=-e^{-\pi-2k\pi}+1>0$

$s\left(\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}<0$

$\therefore s(x)$ 在 $\left((2k+1)\pi,\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi\right)$ 和 $\left(\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi,(2k+2)\pi\right)$ 上各有一个零点 x_4,x_5，

$s(x)$ 共两个零点. 故方程 $f(x)=-1$ 有两个实数根.　　……………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线