2023届高三第十三次模考数学（文科）试卷

第Ⅰ卷　选择题（共60分）

本试卷共4页，23题（含选考题）。全卷满分150分。考试用时120分钟。

一、选择题：（本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。请将正确的答案填涂在答题卡上。）

1.已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-2<0\}$，且 $a\in A$，则 a 可以为（　　）

A. -2　　B. -1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\sqrt{2}$

2.在复平面内，复数 $\frac{z}{\mathrm{i}}$ 对应的点的坐标是 $(3,-1)$，则 $z=$(　　)

A. $1+3\mathrm{i}$　　B. $3+\mathrm{i}$　　C. $-3+\mathrm{i}$　　D. $-1-3\mathrm{i}$

3.下列函数中是增函数的为(　　)

A. $f(x)=-x$　　B. $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$　　C. $f(x)=x^2$　　D. $f(x)=\sqrt[3]{x}$

4.当 $x=1$ 时，函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}$ 取得最大值-2，则a=（　　）

A.-1　　B. 1　　C. -2　　D.2

5.已知 $\sin\theta+\sin(\theta+\frac{\pi}{3})=1$，则 $\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=$(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6.已知点 $A(-1,0)$，$B(1,0)$．若直线 $y=kx-2$ 上存在点 P，使得 $\angle APB=90^\circ$，则实数 k 的取值范围是（　）

A. $(-\infty,-\sqrt{3}]$　　B. $[\sqrt{3},+\infty)$　　C. $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　D. $(-\infty,-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},+\infty)$

7.在 $\triangle ABC$ 中，$a=2\sqrt{6}$，$b=2c$，$\cos A=-\frac{1}{4}$，则 $S_{\triangle ABC}=$(　　)

A. $\frac{3}{2}\sqrt{15}$　　B. 4　　C. $\sqrt{15}$　　D. $2\sqrt{15}$

8.已知首项为2的等差数列 $\{a_n\}$ 的前30项中奇数项的和为 A，偶数项的和为 B，且 $B-A=45$，则 $a_n=$（　）

A. $3n-2$　　B. $3n-1$　　C. $3n+1$　　D. $3n+2$

9. 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点 F 作一条渐近线的垂线，垂足为 A. 若 $\angle AFO=2\angle AOF$（O 为坐标原点），则该双曲线的离心率为（　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　　　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　　　　C. 2　　　　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$或 2

10. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AC_1 与平面 A_1BD 相交于点 M，则下列结论一定成立的是（　　）

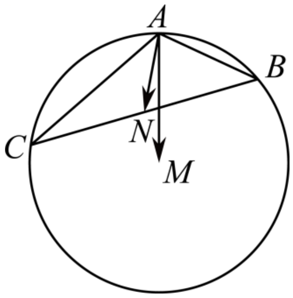
A. $AM=\frac{1}{2}MC_1$　　　　B. $A_1M\perp BD$　　　　C. $AM\perp BD$　　　　D. $MB=MD$

11. 声音是由于物体的振动产生的能引起听觉的波，我们听到的声音多为复合音．若一个复合音的数学模型是函数 $f\left(x\right)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x\left(x\in \mathrm{R}\right)$，则下列结论正确的是（　　）

A. $f\left(x\right)$的一个周期为π　　　　　　　　　　B. $f\left(x\right)$的最大值为$\frac{3}{2}$

C. $f\left(x\right)$的图象关于直线$x=\pi$对称　　　　　　D. $f\left(x\right)$在区间$\left[0,2\pi\right]$上有 3 个零点

12. 如图，圆 M 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，$AB=4$，$AC=6$，N 为边 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AM}=$（　　）



A. 5　　　　　B. 10　　　　　C. 13　　　　　D. 26

第 II 卷（共 90 分）

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{3}}x, x\geq 1\\ 3^x, x<1\end{cases}$ 的值域为_______.

14.已知数列$\{a_n\}$各项均为正数，$a_2=3a_1$，S_n为其前n项和.若$\{\sqrt{S_n}\}$是公差为$\frac{1}{2}$的等差数列，则

$a_1=$_______ $a_n=$_______.

15. 经过抛物线 $x^2=4y$ 的焦点的直线与抛物线相交于 A，B 两点，若 $|\mathrm{AB}|=4$，则 $\triangle OAB$（O 为坐标原点）的面积为_______.

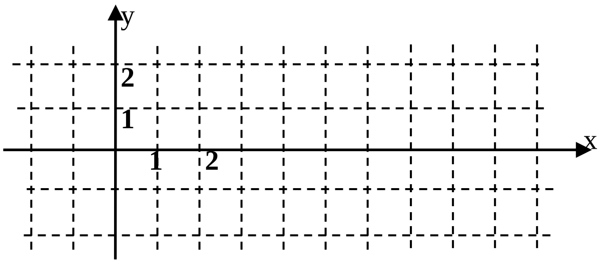
16. 若正四面体的棱长为 4，则该四面体内切球的球心到其一条侧棱的距离为_______.

三、解答题：（本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=2\sin(\frac{\pi}{6}x+\frac{\pi}{3})$.

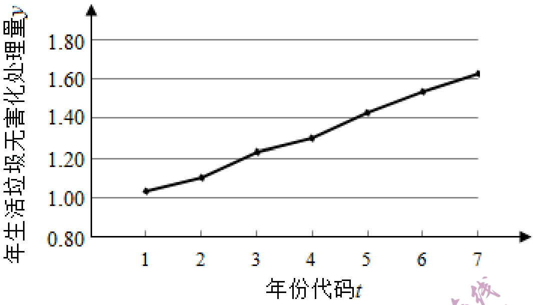
（1）列表并画出 $y=f(x), x\in[-2,10]$ 的图象；



（2）求函数 $g(x)=f(1+x)+f(4-x)$ 在区间[0,6]上的值域.

18.（本小题满分 12 分）

下图是我国 2014 年至 2020 年生活垃圾无害化处理量(单位：亿吨)的折线图.



注：年份代码 1–7 分别对应年份 2014–2020（2021 年后代码依次类推 ）.

(1)由折线图看出，可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系，请用相关系数加以说明；

(2)建立 y 关于 t 的回归方程(系数精确到 0．01)，预测 2023 年我国生活垃圾无害化处理量.

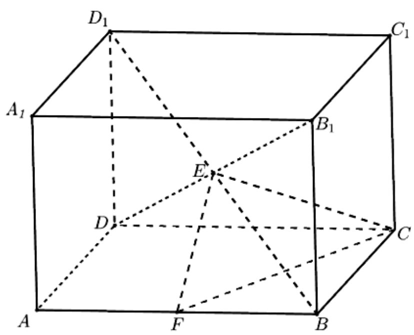
附注：参考数据：$\sum_{i=1}^{7}y_i=9.32$，$\sum_{i=1}^{7}t_iy_i=40.17$，$\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}=0.55$，$\sqrt{7}\approx 2.646$.

参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$

回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}t$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}$.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AD=2$，BD_1 和 B_1D 交于点 E，F 为 AB 的中点.



（1）求证：EF // 平面 ADD_1A_1；

(2) 已知 B_1D 与平面 BCC_1B_1 所成角为 $\frac{\pi}{4}$，求点 A 到平面 CEF 的距离.

20.（本小题满分 12 分）

已知点 P 是平面直角坐标系 xOy 异于 O 的任意一点，过点 P 作直线 l_1： $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ 及 l_2： $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$ 的平行线，分别交 x 轴于 M， N 两点，且 $|OM|^2+|ON|^2=8$．

（1）求点 P 的轨迹 C 的方程；

（2）在 x 轴正半轴上取两点 $A(m,0)$， $B(n,0)$，且 $mn=4$，过点 A 作直线 l 与轨迹 C 交于 E， F 两点，证明： $\sin\angle EBA=\sin\angle FBA$．

21.（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=x^3+ax^2-a^2x+m\quad(a>0)$

(1)若 $a=1$ 时函数 $f(x)$ 有三个互不相同的零点，求 m 的范围；

(2)若函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 内没有极值点，求 a 的范围；

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分．

22.（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

已知曲线 C_1 的参数方程是 $\begin{cases}x=2\cos\varphi\\ y=3\sin\varphi\end{cases}(\varphi\text{为参数})$，以坐标原点为极点，$x$ 轴的正半轴为极轴建立坐标系，曲线 C_2 的坐标系方程是 $\rho=2$，正方形 $ABCD$ 的顶点都在 C_2 上，

且 A,B,C,D 依逆时针次序排列，点 A 的极坐标为 $(2,\frac{\pi}{3})$

（1）求点 A,B,C,D 的直角坐标；

（2）设 P 为 C_1 上任意一点，求 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2$ 的取值范围.

23.（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+\left|x+\frac{1}{2}\right|$，$M$ 为不等式 $f(x)<2$ 的解集.

（1）求 M;

（2）证明：当 a，$b\in M$ 时，$|a+b|<|1+ab|$.