机密★启用前

华大新高考联盟2018届高三1月教学质量测评

理科数学

命题：华中师范大学考试研究院

成绩查询网址：huada. onlyets. com　　微信公众号成绩查询关注：ccnu-testing

本试题卷共4页，23题（含选考题）。全卷满分150分。考试用时120分钟。

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将准考证号条形码贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 填空题和解答题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答：先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用2B铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后，请将答题卡上交。

第Ⅰ卷

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是满足题目要求的。

1. 若 z 为 $1-2i$ 的共轭复数（i 是虚数单位），则 z 的虚部为

A. 1　　B. 2　　C. 2i　　D. i

2. 设集合 $A=\{y|y=\log_2 x,0<x\leqslant 4\}$，集合 $B=\{x|e^x>1\}$，则 $A\cup B$ 等于

A. $(-\infty,2]$　　B. $(0,+\infty)$　　C. $(-\infty,0)$　　D. $\mathbf{R}$

3. 给出下列四个结论：

①命题“$\forall x>0,x+\frac{1}{x}\geqslant 2$”的否定是“$\exists x_0>0,x_0+\frac{1}{x_0}<2$”；

②“若 $\theta=\frac{\pi}{3}$，则 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$”的否命题是“若 $\theta\neq\frac{\pi}{3}$，则 $\sin\theta\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$”；

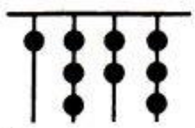
③$p\vee q$ 是真命题，$p\wedge q$ 是假命题，则命题 p,q 中一真一假；

④若 $p:\frac{1}{x}\leqslant 1$；$q:\ln x\geqslant 0$，则 p 是 q 的充分不必要条件.

其中正确结论的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. “结绳计数”是远古时期人类智慧的结晶，即人们通过在绳子上打结来记录数量. 如图所示的是一位猎人记录自己采摘果实的个数. 在从右向左依次排列的不同绳子上打结，满四进一. 根据图示可知，猎人采摘的果实的个数是



A. 492　　B. 382　　C. 185　　D. 123

5. 函数 $f(x)=2|x-a|+3$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上不单调，则 a 的取值范围是

A. $[1,+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(-\infty,1)$　　D. $(-\infty,1]$

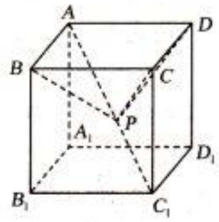
6. 已知 $m,n,a,b\in\mathbf{R}$，且满足 $3m+4n=6$，$3a+4b=1$，则 $\sqrt{(m-a)^2+(n-b)^2}$ 的最小值为

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

7. 某数学期刊的国内统一刊号是 CN42-1167/O1，其邮发代号是 38-69，设 a_n 表示 42^n+1167^n 的个位数字，则数列 $\{a_n\}$ 第 38 项至第 69 项之和 $a_{38}+a_{39}+\cdots+a_{69}=$

A. 180　　B. 160　　C. 150　　D. 140

8. 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，点 P 在线段 AC_1 上，当 $\angle BPD$ 最大时，四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的体积与正方体的体积比为



A. $\frac{1}{24}$　　B. $\frac{1}{18}$

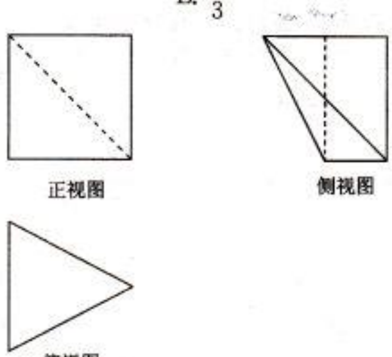
C. $\frac{1}{9}$　　D. $\frac{1}{12}$

9. 已知椭圆的短轴长为 8，点 F_1,F_2 为其两个焦点，点 P 为椭圆上任意一点，$\triangle PF_1F_2$ 的内切圆面积的最大值为 $\frac{9}{4}\pi$，则椭圆的的离心率为

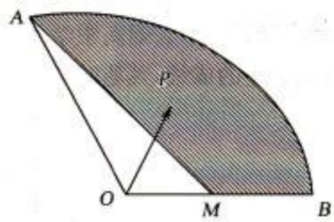
A. $\frac{4}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

10. 如图是某四棱锥的三视图，其中正视图是边长为 2 的正方形，侧视图是底边长分别为 2 和 1 的直角梯形，则该几何体的体积为

A. $\frac{8}{3}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$



第 10 题图



第 11 题图

11. 如图，在扇形 OAB 中，$\angle AOB=120^\circ$，$OA=OB=2$，点 M 为 OB 的中点，点 P 为阴影区域内任一点（含边界），若 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OM}$，则 $m+n$ 的最大值为

A. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{21}}{3}$　　C. $\sqrt{7}$　　D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

12. 关于函数 $f(x)=2\ln x+x^2+x$，下列说法错误的是

A. 不存在正实数 k，使得 $f(x)>kx$ 恒成立

B. 对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，若 $x_1<x_2$，有 $x_2f(x_1)<x_1f(x_2)$

C. 对任意 $x_1,x_2\in(0,1)$，$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

D. 若正实数 x_1,x_2 满足 $f(x_1)+f(x_2)=4$，则 $x_1+x_2\geqslant2$

第Ⅱ卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第 13 题～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22 题、23 题为选考题，考生根据要求作答。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分。

13. 已知 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则直线 $x\cos\alpha-\sqrt{3}y-1=0$ 的倾斜角的范围是________.

14. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_2=5$，若 $\boldsymbol{m}=(1,a_{n+1}+1)$，$\boldsymbol{n}=(a_n+a_{n+2},-2)$，$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$，则数列 $\{a_n\}$ 通项公式为________.

15. 设实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}y-2x\leqslant 0,\\2x+y-6\leqslant 0,\\y\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=\frac{x}{2}+\frac{1}{y}$ 的最小值为________.

16. 已知圆 $C:x^2+y^2-4x-2y-44=0$，点 P 的坐标为 $(t,4)$，其中 $t>2$. 若过点 P 有且只有一条直线 l 被圆 C 截得的弦长为 $4\sqrt{6}$，则直线 l 的一般式方程是________.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 12 分）

已知直线 $x_0=\frac{\pi}{3}$ 是函数 $f(x)=-2\cos^2x+4m\sin x\cdot\cos x+3$ 的一个极值点，将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，向下平移 2 个单位得到 $g(x)$ 的图象.

(1) 求函数 $g(x)$ 的解析式；

(2) 设锐角 $\triangle ABC$ 中角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $g(B)=0$，且 $b=\sqrt{3}$，$t>a-\frac{c}{2}$ 恒成立，求 t 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

某市教育局对该市普通高中学生进行学业水平测试，试卷满分 120 分. 现从全市学生中随机抽出了 10 名学生的成绩，其茎叶图如下图所示：

7	8				
8	1	4	6	6	7
9	2	3	6	7	

(1) 已知这 10 名学生的平均成绩为 88，计算其中位数和方差；

(2) 已知全市学生的学习成绩分布服从正态分布 $N(\mu,\delta^2)$，某校实验班有学生 30 人.

（ⅰ）依据(1)的结果，试估计该班学业水平测试成绩在 $(94,100)$ 的学生人数（结果四舍五入取整数）；

（ⅱ）为参加学校举办的数学知识联赛，该班决定推荐成绩在 $(94,100)$ 的学生参加预选赛，若每个学生通过预选赛的概率为 $\frac{2}{3}$，用随机变量 X 表示通过预选赛的人数，求 X 的分布列和数学期望.

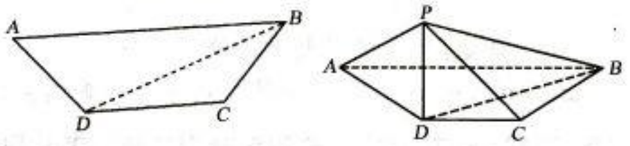
正态分布参考数据：$P(\mu-\delta<x<\mu+\delta)=0.6826$，$P(\mu-2\delta<x<\mu+2\delta)=0.9544$.

19.(本小题满分 12 分)

已知四边形 $ABCD$ 为等腰梯形,$AB\parallel CD$,$AB=2$,$AD=CD=BC=1$,沿对角线 BD 将 $\triangle ABD$ 旋转,使得点 A 至点 P 的位置,此时满足 $PD\perp BC$.

(1)判断 $\triangle PDC$ 的形状,并证明;

(2)求二面角 $A-PB-C$ 平面角的正弦值.



20.(本小题满分 12 分)

已知动圆 G 过定点 $F(4,0)$,且在 y 轴上截得的弦长为 8.

(1)求动圆 G 的圆心 G 点的轨迹方程 Γ;

(2)过点 $S(2,0)$ 的动直线与曲线 Γ 交于 A,B 两点,平面内是否存在定点 T,使得直线 AT,BT 分别交 Γ 于 C,D 两点,使得直线 AB,CD 的斜率 k_1,k_2 满足 $k_1=2k_2$? 若存在,请求出 T 点的坐标;若不存在,请说明理由.

21.(本小题满分 12 分)

已知 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数,且 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-f(0)x+f'(1)e^{x-1}$,

(1)判断函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)若 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2+x$,讨论函数 $h(x)=(x-e)\cdot(g(ax^2-x)-x)$ 零点的个数.

请考生在第 22,23 题中任选一题作答,如果多做,则按照所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

以平面坐标系的原点为极点,x 轴的正半轴为极轴,建立极坐标系,两种坐标系中取相同的长度单位,已知圆 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\cos\alpha, \\ y=1+\frac{1}{2}\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数),圆 C_2 的极坐标方程为 $4\rho^2-16\rho\cos\theta+15=0$.

(1)分别写出 C_1 和 C_2 的直角坐标方程.

(2)已知点 M,N 分别是圆 C_1,C_2 上的动点,点 P 的坐标为 $(2,2)$,求 $|PN|-|PM|$ 最大值.

23.(本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x-1|$,$g(x)=t|x|-2$.

(1)解关于 x 的不等式 $f(x)>2x+1$.

(2)若不等式 $f(x)\geqslant g(x)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,求 t 的取值范围.

华大新高考联盟 2018 届高三 1 月教学质量测评

理科数学参考答案和评分标准

1. B　本题考查复数的基本概念.

【解析】$z=1+2i$,其虚部为 2,故答案选 B.

2. D　本题考查集合的运算,指数函数、对数函数的基本性质.

【解析】$A=(-\infty,2]$,$B=(0,+\infty)$,故 $A\cup B=\mathbf{R}$,答案选 D.

3. C　本题考查了命题真假判断、充要条件等基础知识.

【解析】①②③对,④错;答案选 C.

4. D　本题以数学文化为载体,考查了进位制等基础知识.

【解析】$1\times4^3+3\times4^2+2\times4+3=123$,答案选 D.

5. B　本题考查绝对值函数的图象和性质.

【解析】函数 $f(x)$ 的图象呈"V"形状,在区间 $(a,+\infty)$ 单调递增,要使函数 $f(x)$ 区间 $[1,+\infty)$ 上不单调,则 $a>1$,答案选 B.

6. C　本题以两条平行直线间的距离为背景,考查学生的联想和构造能力.

【解析】可理解为点 $A(m,n)$ 和点 $B(a,b)$ 分别在直线 $l_1:3x+4y=6$ 与 $l_2:3x+4y=1$ 上,$|AB|=\sqrt{(m-a)^2+(n-b)^2}$,由 $l_1/\!/l_2$,则 $|AB|_{\min}=\dfrac{|6-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$,答案选 C.

7. B　本题以实际生活情境为背景,考查数列的周期性、求和的基本方法以及归纳猜想能力.

【解析】分析知:$a_1=9,a_2=3,a_3=1,a_4=7,a_5=9,a_6=3\cdots\cdots$,显然数列 $\{a_n\}$ 是以 4 为周期的数列,$a_{38}+a_{39}+\cdots+a_{69}=8\times(9+3+1+7)=160$,答案选 B.

8. C　本题以立体几何中的线线、线面位置关系为基础,考查学生运算求解能力.

【解析】连接 AC,BD,交于点 O,连 OP,显然 $OP\perp BD$,$\angle BPD=2\angle BPO$,要 $\angle BPD$ 最大,只需 OP 最小,此时 $OP\perp AC_1$,由平面几何知识易求得:当 $OP\perp AC_1$ 时,$\dfrac{AP}{AC_1}=\dfrac{1}{3}$. 设正方体的棱长为 a,则

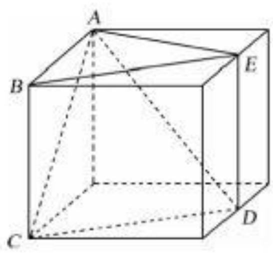
$\dfrac{V_{P\text{-}ABCD}}{V_{ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1}}=\dfrac{\frac{1}{3}a^2\times\frac{1}{3}a}{a^3}=\dfrac{1}{9}$,答案选 C.

9. C　本题考查椭圆的定义和方程,椭圆的几何性质,离心率.

【解析】不妨设椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,则 $2b=8$,即 $b=4$. 设$\triangle PF_1F_2$ 内切圆的半径为 r,则有 $S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}(2a+2c)r=\dfrac{1}{2}\cdot2c\cdot|y_P|$,即 $r=\dfrac{c|y_P|}{a+c}$,又当点 P 运动到椭圆短轴的端点时,$\triangle PF_1F_2$ 的面积最大,此时 r 有最大值$\dfrac{3}{2}$,且 $|y_P|=b$,于是有$\dfrac{4c}{a+c}=\dfrac{3}{2}$,即 $3a=5c$,故椭圆的离心率为 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5}$,故选 C.

10. A　本题考查三视图还原直观图的方法,几何体体积的计算,考查空间想象能力及运算求解能力.

【解析】如图,在棱长为 2 的正方体中,点 A,B,C 为正方体的顶点,点 D,E 为所在棱的中点,由三视图还原后的几何体为四棱锥 $A\text{-}BCDE$,分析知四棱锥的侧面 $ABE\perp$ 底面 $BCDE$,点 A 到直线 BE 的距离即为棱锥的高,易求得为$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$,故四棱锥的体积为 $V=\dfrac{1}{3}\times2\times\sqrt{5}\times\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$



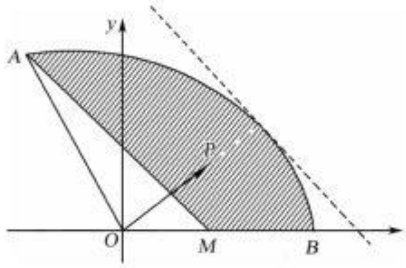
$=\frac{8}{3}$，答案选 A.

11. B　本题考查了平面向量的基本定理、向量的共线、向量的运算.

【解析】方法 1：以 O 点为原点，OB 所在的直线为 x 轴. 如图建立直角坐标系.

设 $P(x,y)$，AM：$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$A(-1,\sqrt{3})$，$M(1,0)$.

则 x,y 满足的约束条件为 $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 4,\\ y\geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2},\\ y\geqslant 0,\end{cases}$



又 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OM}=m(-1,\sqrt{3})+n(1,0)=(-m+n,\sqrt{3}m)$.

$\therefore\begin{cases}x=-m+n,\\ y=\sqrt{3}m\end{cases}$　$\begin{cases}m=\frac{\sqrt{3}}{3}y,\\ n=x+\frac{\sqrt{3}}{3}y.\end{cases}$　令 $z=m+n=x+\frac{2\sqrt{3}}{3}y$，

利用线性规划知识得，当直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}z$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相切时（如图），z 最大.

$\therefore\frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}z\right|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1}}=2$ 得 $z=\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

方法 2：设直线 OP 交 AM 于点 N. 过点 P 作直线 $l\,/\!/\,AM$，交直线 OB 于点 D. 平移直线 l，设移到 l_1 的位置时与圆弧相切，切点为点 F，直线 l_1 交直线 OB 于点 E.

设 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{ON}$，$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{OP}=\frac{1}{\lambda}(m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OM})=\frac{m}{\lambda}\overrightarrow{OA}+\frac{n}{\lambda}\overrightarrow{OM}$.

由 A，N，M 三点共线知：$\frac{m}{\lambda}+\frac{n}{\lambda}=1$，所以 $m+n=\lambda$，显然 $\lambda>0$，于是 $\lambda=\frac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{ON}|}$.

当 l 在直线 AM 与 l_1 之间平行移动时，点 D 在线段 EM 上运动，于是 $\lambda=\frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OM}|}\leqslant\frac{|\overrightarrow{OE}|}{|\overrightarrow{OM}|}$.

在 $\triangle AOM$ 中 $OM=1$，$OA=2$，$\angle AOM=120°$，

由余弦定理：$AM^2=2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos120°=7$，即 $AM=\sqrt{7}$.

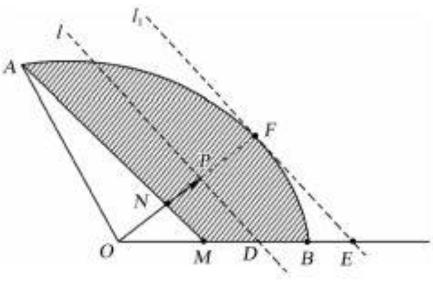
由正弦定理得 $\frac{AO}{\sin\angle AMO}=\frac{AM}{\sin\angle AOM}$，即 $\frac{2}{\sin\angle AMO}=\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，故 $\sin\angle AMO=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

由 $l_1\,/\!/\,AM$，则 $\sin\angle FEO=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OFE$ 中，$OE=\frac{OF}{\sin\angle FEO}=\frac{2}{\frac{\sqrt{21}}{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$，

$|\overrightarrow{OM}|=1$，故 λ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{21}}{3}$. 故答案选 B.

备注：本题也可以用坐标法求解转化为三角函数的最值问题.



12. C　本题考查了用导数研究函数的单调性、极值等知识，注重考查数形结合、转化化归等思想.

【解析】对于 A 选项，$x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\frac{2}{x}+2x+1>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

又 $f\left(\frac{1}{e}\right)=-2+\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e}<0$，则 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 时，$f(x)<0$，此时若 $f(x)>kx$ 恒成立，则 k 不可能是正数，故 A 正确.

对于 B 选项，$\frac{f(x)}{x}=\frac{2\ln x}{x}+x+1$，令 $g(x)=\frac{2\ln x}{x}+x+1$，则 $g'(x)=\frac{x^2-2\ln x+2}{x^2}$.

令 $h(x)=x^2-2\ln x+2$，$h'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x}$.

显然当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增.

故 $h(x)\geqslant h(1)=3$，则 $g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，若 $x_1<x_2$，有 $\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_2)}{x_2}$，即 $x_2f(x_1)<x_1f(x_2)$，故 B 正确.

对于 C 选项，

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\frac{x_1+x_2}{2}+\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\frac{x_1+x_2}{2}\leqslant\frac{2\ln x_1+x_1^2+x_1+2\ln x_2+x_2^2+x_2}{2}$$

即 $2\ln\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_1x_2}{2}-\ln x_1-\ln x_2-\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}\leqslant 0$

令 $g(x_1)=2\ln\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_1x_2}{2}-\ln x_1-\ln x_2-\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}$

则 $g'(x_1)=\frac{2}{x_1+x_2}+\frac{x_2}{2}-\frac{1}{x_1}-\frac{x_1}{2}=\frac{(x_2-x_1)\cdot(x_1^2+x_1x_2-2)}{(x_1+x_2)\cdot 2x_1}$

不妨设 $x_1\leqslant x_2$，由于 $x_1,x_2\in(0,1)$，故 $g'(x_1)<0$，

则 $g(x_1)\geqslant g(x_2)=2\ln\frac{x_2+x_2}{2}+\frac{x_2\cdot x_2}{2}-\ln x_2-\ln x_2-\frac{x_2^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}=0$，

即 $2\ln\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_1x_2}{2}-\ln x_1-\ln x_2-\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}\geqslant 0$，故 C 不正确.

对于 D 选项，不妨设 $x_1\leqslant x_2$，由 $f(1)=2$ 知，$x_1\leqslant 1$，$x_2\geqslant 1$.

$x_1+x_2\geqslant 2\Leftrightarrow x_1\geqslant 2-x_2\Leftrightarrow f(x_1)\geqslant f(2-x_2)\Leftrightarrow 4-f(x_2)\geqslant f(2-x_2)\Leftrightarrow f(x_2)+f(2-x_2)\leqslant 4$.

设 $F(x)=f(x)+f(2-x)$，$x\geqslant 1$，

$$F'(x)=f'(x)-f'(2-x)=\frac{2}{x}+2x+1-\frac{2}{2-x}-2(2-x)-1=4x-4+\frac{2}{x}+\frac{2}{x-2}$$

$$=4(x-1)\left[1-\frac{1}{x(2-x)}\right]\leqslant 4(x-1)\left[1-\frac{1}{\left(\frac{x+2-x}{2}\right)^2}\right]=0,$$

即 $F'(x)\leqslant 0$，故 $F(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，于是 $F(x)\leqslant F(1)=2f(1)=2\times 2=4$. 故 D 正确.

综上所述，本题选 C.

二、填空题

13. $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$　本题考查了直线的倾斜角、余弦函数值.

【解析】当 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，直线的斜率 $k=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{3}}\in\left[0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$，则倾斜角范围是 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$.

14. n^2+n-1　本题考查等差数列、数列的递推关系等知识.

【解析】由已知 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$ 得 $1\times(a_n+a_{n+2})-2(a_{n+1}+1)=0$，即 $(a_{n+2}-a_{n+1})=(a_{n+1}-a_n)+2$，

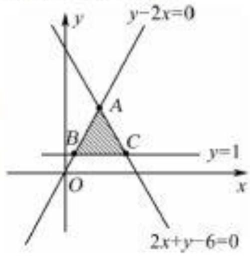
则 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是首项为 a_2-a_1，公差为 2 等差数列，

则 $a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)+(n-1)\times 2=(5-1)+(n-1)\times 2=2n+2=2(n+1)$.

于是 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}+a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=2n+2(n-1)+\cdots+2\times2+1$

$=2[n+(n-1)+\cdots+2]+1=n^2+n-1$.

15. 1　本题主要考查线性规划、函数、不等式等知识，要求学生用函数的视角分析线性规划问题.



【解析】画出可行域如图所示，可求得 $A\left(\frac{3}{2},3\right)$，$B\left(\frac{1}{2},1\right)$. 当 y 为常数时，要使 $z=\frac{x}{2}+\frac{1}{y}$ 最小，则 x 须最小，这样的点在同一水平线可行域内的最左侧，因此所有可能让 z 取到最小值的点在线段 AB 上，此时该点坐标满足方程 $y=2x$，$y\in[1,3]$，于是 $z=\frac{x}{2}+\frac{1}{y}=\frac{y}{4}+\frac{1}{y}\geqslant1$，当且仅当 $y=2\in[1,3]$ 取等号.

16. $4x+3y-36=0$　本题主要考查直线和圆的位置关系，垂径定理、切线方程的求法，突出了联想和构造能力，特别体现了数形结合的思想.

【解析】整理可得圆 C：$(x-2)^2+(y-1)^2=49$. 由弦长 $|MN|=4\sqrt{6}$ 知，圆心 C 到直线 l 的距离为 $d=\sqrt{49-\left(\frac{|MN|}{2}\right)^2}=\sqrt{49-24}=5$，即点 C 到直线 l 的距离恒为 5，故这样的直线 l 是圆 D：$(x-2)^2+(y-1)^2=25$ 的切线. 若点 P 在圆 D 外，这样的直线必有两条，由直线 l 的唯一性知，点 P 在圆 D 上，于是 $(t-2)^2+(4-1)^2=25$，解之得 $t=6$ 或 -2. 又 $t>2$，故 $t=6$，则 P 点坐标为 $(6,4)$，于是直线 PC 的斜率 $k_{PC}=\frac{4-1}{6-2}=\frac{3}{4}$，而 $l\perp PC$，故直线 l 的方程为 $y-4=-\frac{4}{3}(x-6)$，即 $4x+3y-36=0$.

三、解答题

17. 本题主要考查三角函数的图象性质、解三角形等知识.

(1) 化简得 $f(x)=2m\sin2x-\cos2x+2$. ………………………………（1 分）

由题意知 $x=\frac{\pi}{3}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴，

于是 $\sqrt{4m^2+1}=\left|2m\sin\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{2\pi}{3}\right|$，解之得 $m=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………………（3 分）

故 $f(x)=\sqrt{3}\sin2x-\cos2x+2=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+2$. ………………（4 分）

于是 $g(x)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{6}\right]+2-2=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. ………………（5 分）

(2) 由 $g(B)=0$ 得 $\sin\left(2B+\frac{\pi}{3}\right)=0$，则 $2B+\frac{\pi}{3}=k\pi$，即 $B=\frac{k}{2}\pi-\frac{\pi}{6}$，而 $B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，故 $B=\frac{\pi}{3}$.

………………………………………………（6 分）

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=2$，故 $a=2\sin A$，$c=2\sin C$，

$a-\frac{c}{2}=2\sin A-\sin C=2\sin A-\sin\left(\frac{2}{3}\pi-A\right)=\frac{3}{2}\sin A-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\sqrt{3}\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)$ …（8 分）

又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，$A\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $A-\frac{\pi}{6}\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，$\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)\in\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

则 $a-\frac{c}{2}\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$，故 $t\geqslant\frac{3}{2}$. ………………………………（12 分）

18. 本题主要考查茎叶图、中位数及方差的理解及求法、利用正态分布的性质求概率，二项分布等知识，考查学生的数据处理能力、知识迁移能力及应用意识.

(1) 由茎叶图可知这 10 个数据依次为 78，81，84，86，86，87，92，93，96，97.

中位数为$\frac{86+87}{2}=86.5$. …………………………………………………………………… (1 分)

由平均数为 $x=88$ 知

方差为 $s^2=\frac{1}{10}[(-10)^2+(-7)^2+(-4)^2+(-2)^2+(-2)^2+(-1)^2+4^2+5^2+8^2+9^2]=36$.

…………………………………………………………………………………………………… (3 分)

(2)(ⅰ)由(1)知 $\mu=88,\delta=6$. …………………………………………………………………… (4 分)

$P(94<x<100)=P(\mu+\delta<x<\mu+2\delta)=\frac{P(\mu-2\delta<x<\mu+2\delta)-P(\mu-\delta<x<\mu+\delta)}{2}$

$=\frac{0.9544-0.6826}{2}=0.1359$. …………………………………………………… (7 分)

该班学生成绩在(94,100)的人数为 $30\times0.1359=4.05$ 4. …………………………………… (8 分)

(ⅱ)随机变量 $X=0,1,2,3,4$,显然 X 服从二项分布 $B\left(4,\frac{2}{3}\right)$,其分布列为

$P(X=k)=C_4^k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$,其中 $k=0,1,2,3,4$. ………………………………… (10 分)

$E(X)=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$. ……………………………………………………………………………… (12 分)

19. 本题主要考查空间中的直线与直线、直线与平面、以及平面与平面之间的位置关系,二面角的求法,在动态过程中准确把握位置关系的变与不变,注重考查学生的推理论证能力、空间想象能力以及运算求解能力.

(1)$\triangle PCD$ 为等腰直角三角形.

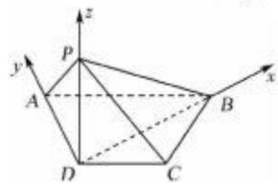
证明:在等腰梯形 $ABCD$ 中,由平面几何知识易得$\angle A=60^\circ$,又 $AB=2,AD=1$,由余弦定理可得 $BD=\sqrt{3}$,则 $AD^2+BD^2=AB^2$,故 $AD\perp BD$. ……………………………………… (2 分)

折叠后 $PD\perp BD$,又 $PD\perp BC$,$BD\cap BC=B$,故 $PD\perp$面 BCD. ………………………… (3 分)

而 CD 面 BCD,故 $PD\perp CD$. ……………………………………………………………… (4 分)

又 $PD=CD$,故$\triangle PCD$ 为等腰直角三角形. ………………………………………………… (5 分)

(2)由(1)知 $PD\perp$面 $ABCD$,$AD\perp BD$,以点 D 为坐标原点,以 DB,DA,DP 所在的直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



则 $A(0,1,0),B(\sqrt{3},0,0),P(0,0,1),C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$. …… (7 分)

则$AP=(0,-1,1),PB=(\sqrt{3},0,-1),BC=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$,设

平面 APB 的法向量为$\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot AP=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot BP=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-y+z=0,\\ \sqrt{3}x-z=0.\end{cases}$

取 $x=1$,则 $y=\sqrt{3},z=\sqrt{3}$,故 $\boldsymbol{n}_1=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$. ……………………………………… (9 分)

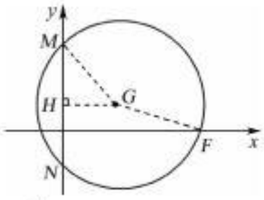
同理可求得平面 PBC 的法向量$\boldsymbol{n}_2=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$. ………………………………… (11 分)

设二面角 A-PB-C 的平面角为θ,则$|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|1-3+3|}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{1}{7}$.

结合图形可知 $\sin\theta=\frac{4\sqrt{3}}{7}$. ………………………………………………………………… (12 分)

20. 定点问题是解析几何中的热点问题,本题以抛物线知识为主体,以探究性问题为命题形式,着重考查圆的性质,轨迹方程的求法,直线和抛物线的位置关系,抛物线的几何性质等知识,考查学生求解运算能力和推理论证能力,以及数形结合、转化与化归等数学思想.

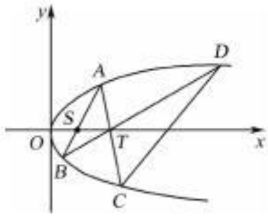
(1)设动圆圆心 $G(x,y)$，设圆交 y 轴于 M,N 两点，连接 GF,GM，则 $|GF|=|GM|$，过点 G 作 $GH\perp MN$，则点 H 是 MN 的中点，显然 $|GM|=\sqrt{x^2+4^2}$，$|GF|=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$，



于是 $\sqrt{(x-4)^2+y^2}=\sqrt{x^2+4^2}$，化简整理得 $y^2=8x$，

故 G 点的轨迹方程为 $\Gamma: y^2=8x$. ………………………………（4 分）

(2)设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4),T(m,n)$，



设直线 AB 方程为 $x=ay+2$，由 $\begin{cases}x=ay+2,\\ y^2=8x,\end{cases}$ 得 $y^2-8ay-16=0$，

$y_1+y_2=8a$，$y_1\cdot y_2=-16$，直线 AB 的斜率 $k_1=\dfrac{1}{a}$.

由 $A(x_1,y_1)$，$T(m,n)$ 得直线 AT 的方程为 $y-n=\dfrac{y_1-n}{x_1-m}(x-m)$，

由 $\begin{cases}y-n=\dfrac{y_1-n}{x_1-m}(x-m),\\ y^2=8x,\end{cases}$ 得 $y^2-\dfrac{8(x_1-m)}{y_1-n}y+\dfrac{8nx_1-8my_1}{y_1-n}=0$，

于是 $y_1\cdot y_3=\dfrac{8nx_1-8my_1}{y_1-n}$. 又 $y_1^2=8x_1$，则 $y_1\cdot y_3=\dfrac{ny_1^2-8my_1}{y_1-n}$.

于是 $y_3=\dfrac{ny_1-8m}{y_1-n}$，同理 $y_4=\dfrac{ny_2-8m}{y_2-n}$， ……………………………………………………（6 分）

于是直线 CD 的斜率 $k_2=\dfrac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=\dfrac{y_3-y_4}{\dfrac{y_3^2}{8}-\dfrac{y_4^2}{8}}=\dfrac{8}{y_3+y_4}=\dfrac{8}{\dfrac{ny_1-8m}{y_1-n}+\dfrac{ny_2-8m}{y_2-n}}$，

$k_2=\dfrac{8[y_1y_2-n(y_1+y_2)+n^2]}{2ny_1y_2-(8m+n^2)(y_1+y_2)+16mn}=\dfrac{8(-16-8na+n^2)}{2n\times(-16)-(8m+n^2)\times 8a+16mn}$

$=\dfrac{16+8na-n^2}{4n+(8m+n^2)a-2mn}$，则 $\dfrac{16+8na-n^2}{4n+(8m+n^2)a-2mn}=\dfrac{1}{2a}$， ………………………………（10 分）

即 $-16na^2+(3n^2+8m-32)a-2mn+4n=0$ 对 $a\in\mathbf{R}(a\neq 0)$ 恒成立，

故 $\begin{cases}-16n=0,\\ 3n^2+8m-32=0,\\ -2mn+4n=0,\end{cases}$ 解之得 $n=0,m=4$，故 $T(4,0)$. ………………………………（12 分）

21. 高考注重对函数性态的研究，突出导数的工具价值，考查导数的运算法则、利用导判断函数的单调性，以及分类讨论、数形结合、转化与化归等数学思想.

(1)对 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-f(0)x+f'(1)e^{x-1}$ 求导可得 $f'(x)=x-f(0)+f'(1)e^{x-1}$，

$\therefore f'(1)=1-f(0)+f'(1)$，则 $f(0)=1$，于是 $f(0)=f'(1)e^{-1}$，$\therefore f'(1)=e$.

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+e^x$. ……………………………………………………………………………（3 分）

于是 $f'(x)=e^x+x-1$，$f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 单调递增，注意到 $f'(0)=0$，

故 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；$x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

……………………………………………………………………………………………（5 分）

(2)由(1)知：$g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+e^x-\dfrac{1}{2}x^2+x=e^x$，

由 $h(x)=0$ 得 $x=e$ 或 $g(ax^2-x)-x=0$.

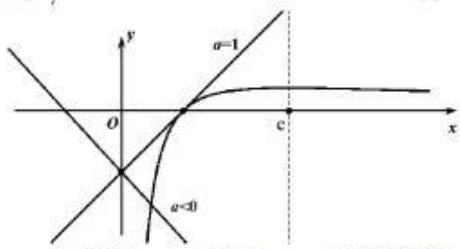
若 $g(ax^2-x)-x=0$，则 $ax^2-x=\ln x$， ………………………………………………（6 分）

即 $ax-1=\dfrac{\ln x}{x}$，设 $\varphi(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

分析知 $x>1$ 时，$\varphi(x)>0$；$x\to+\infty$ 时，$\varphi(x)\to 0$；$x\to 0$ 时，$\varphi(x)\to-\infty$. ………………………（7 分）

先考虑特殊情况：



①若直线 $y=ax-1$ 与 $\varphi(x)$ 相切，

设切点为 (x_0,y_0)，

则 $\begin{cases} a=\dfrac{1-\ln x_0}{x_0^2}, \\ ax_0-1=\dfrac{\ln x_0}{x_0}, \end{cases}$

消去 a 整理得 $2\ln x_0+x_0-1=0$，设 $m(x_0)=2\ln x_0+x_0-1$，显然 $m(x_0)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

而 $m(1)=0$，故 $x_0=1$，此时 $a=1$. ………………………………………………………………（8 分）

②若直线 $y=ax-1$ 过点 $(e,\varphi(e))$，由 $\varphi(e)=\dfrac{1}{e}$，则 $ae-1=\dfrac{1}{e}$，则 $a=\dfrac{1}{e^2}+\dfrac{1}{e}$. ………（9 分）

结合图形不难得到如下结论：

当 $a>1$ 时，$h(x)$ 有一个零点；………………………………………………………………（10 分）

当 $a\leqslant 0$ 或 $a=1$ 或 $a=\dfrac{1}{e^2}+\dfrac{1}{e}$ 时，$h(x)$ 有两个零点；……………………………………（11 分）

当 $0<a<1$ 且 $a\neq\dfrac{1}{e^2}+\dfrac{1}{e}$，$h(x)$ 有三个零点. ………………………………………………（12 分）

22. 本题主要考查了圆的参数方程、极坐标方程与普通方程间的互化、两点间的距离公式，突出了数形结合的思想.

（1）由圆 C_1 的参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\cos\alpha, \\ y=1+\dfrac{1}{2}\sin\alpha \end{cases}$ 得 $x^2+(y-1)^2=\dfrac{1}{4}$. ………………………………（2 分）

由圆 C_2 的极坐标方程为 $4\rho^2-16\rho\cos\theta+15=0$ 得 $4(x^2+y^2)-16x+15=0$，

整理得 $(x-2)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$. ……………………………………………………………………（5 分）

（2）$|PN|-|PM|\leqslant\left(|PC_2|+\dfrac{1}{2}\right)-\left(|PC_1|-\dfrac{1}{2}\right)=|PC_2|-|PC_1|+1$

$=\sqrt{(2-2)^2+(2-0)^2}-\sqrt{(2-0)^2+(2-1)^2}+1=3-\sqrt{5}$. ………………………………（10 分）

23. 本题主要考查绝对值不等式的解法、含参不等式恒成立问题的求解方法，分类讨论、数形结合的思想.

（1）由 $f(x)=|x-1|$，$f(x)>2x+1$ 得 $|x-1|>2x+1$

当 $x\geqslant 1$ 时，$x-1>2x+1$，解得 $x<-2$，舍去.

当 $x<1$ 时，$1-x>2x+1$，解得 $x<0$，所以 $x<0$.

综上，不等式的解集为 $\{x|x<0\}$. ……………………………………………………………（5 分）

（2）由 $f(x)\geqslant g(x)$，得 $|x-1|\geqslant t|x|-2$，下面分四种情形讨论：

当 $x=0$ 时，不等式恒成立，$t\in\mathbf{R}$；

当 $x<0$ 时，不等式化简整理得 $(1-t)x\leqslant 3$，即 $1-t\geqslant\dfrac{3}{x}$ 恒成立，则 $1-t\geqslant 0$，所以 $t\leqslant 1$；

当 $0<x<1$ 时，不等式化简整理得 $(t+1)x\leqslant 3$，即 $t+1\leqslant\dfrac{3}{x}$ 恒成立，则 $t+1\leqslant 3$，所以 $t\leqslant 2$；

当 $x\geqslant 1$ 时，不等式化简整理得 $(t-1)x\leqslant 1$，即 $t-1\leqslant\dfrac{1}{x}$ 恒成立，则 $t-1\leqslant 0$，所以 $t\leqslant 1$.

综上，$t\leqslant 1$. ……………………………………………………………………………（10 分）