姓名________ 座位号__________________________

(在此卷上答题无效)

# 数　　学

本试卷共 4 页,22 题。全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

**考生注意事项:**

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

**一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.**

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$,$B=\{x\mid x^2-6x+8>0\}$,则集合 $A\cap B=$

A. $\{2\}$　　B. $\{2,3,4\}$　　C. $\{1,5,6\}$　　D. $\{1,2,4,5,6\}$

2. 若复数 $z$ 满足 $(1+\mathrm{i})z=|1-\mathrm{i}|$,则 $z=$

A. $-\mathrm{i}$　　B. $\mathrm{i}$　　C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$

3. 已知 $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=2$,则 $\tan\alpha=$

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. $-\frac{3}{4}$

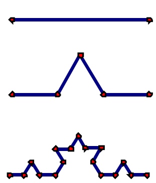
4. 在封闭的等边圆锥(轴截面为等边三角形)内放入一个球,若球的最大半径为 1,则该圆锥的体积为

A. $3\pi$　　B. $6\pi$　　C. $9\pi$　　D. $12\pi$

5. 已知函数 $f(x)=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+a}\right)$ 为奇函数,则 $f(\sqrt{2})=$

A. $\ln(\sqrt{2}-1)$　　B. $\ln(\sqrt{2}+1)$　　C. $2\ln(\sqrt{2}-1)$　　D. $2\ln(\sqrt{2}+1)$

6. 分形几何是一门新兴学科,图 1 是长度为 1 的线段,将其三等分,以中间线段为边作无底边正三角形得到图 2,称为一次分形;同样把图 2 的每一条线段重复上述操作得到图 3,称为二次分形;……,则第 5 次分形后图形长度为

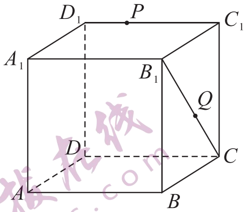



A. $2\frac{10}{27}$　　B. $3\frac{13}{81}$　　C. $4\frac{52}{243}$　　D. $5\frac{451}{729}$

7. 已知椭圆 $C$ 的左右焦点分别为 $F_1,F_2$,$P,Q$ 为 $C$ 上两点,$2\overrightarrow{PF_2}=3\overrightarrow{F_2Q}$,若 $\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$,则 $C$ 的离心率为

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{13}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{17}}{5}$

8. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，$P$，$Q$ 分别为棱 $C_1D_1$，$B_1C$ 上的动点，则四面体 $PQAD$ 的体积最大值为




A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

**二、选择题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分.**

9. 甲乙两名射击运动员在一次射击测试中各射靶 10 次，每次命中的环数如下：

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 甲 | 7 | 8 | 7 | 9 | 5 | 4 | 9 | 10 | 7 | 4 |
| 乙 | 9 | 5 | 7 | 8 | 7 | 6 | 8 | 6 | 7 | 7 |

则

A. 甲乙两人射击成绩的平均数相同

B. 甲乙两人射击成绩的中位数相同

C. 甲命中环数的极差大于乙命中环数的极差

D. 甲比乙射击成绩更稳定

10. 已知 $P(2,0)$，$A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\sin\beta)$，$A$，$B$ 两点不重合，则

A. $|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|$ 的最大值为 2

B. $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$ 的最大值为 2

C. 若 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$，$|\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}|$ 最大值为 $\sqrt{3}$

D. 若 $\overrightarrow{PA}=\lambda\overrightarrow{PB}$，$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$ 最大值为 4

11. 已知 $x=1$ 为函数 $f(x)=x^2-3x-\log_a x$ 的极值点，则（参考数据：$\ln2\approx0.6931$）

A. $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减　　B. $f(x)$ 的极小值为 $-2$

C. $f\left(\frac{3}{5}\right)>f(1)$　　D. $f\left(\frac{1}{4}\right)<f(1)$

12. 已知平行四边形 $ABCD$ 中，$A(1,2)$，$B(-1,0)$，$C(3,0)$，$P$，$Q$ 分别为 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 的外接圆 $\odot M$，$\odot N$ 上一点，则

A. $P$，$Q$ 两点之间的距离的最大值为 6

B. 若直线 $PQ$ 与 $\odot M$，$\odot N$ 都相切，则直线 $PQ$ 的斜率为 1

C. 若直线 $PQ$ 过原点与 $\odot N$ 相切，则直线 $PQ$ 被 $\odot M$ 截得的弦长为 4

D. $\tan\angle ADP$ 的最大值为 $\frac{4}{3}$

**三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13. 二项式 $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^6$ 的展开式中的常数项为__________.

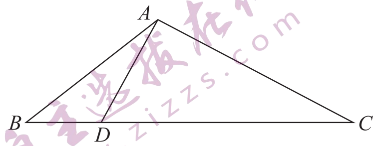
14. 写出函数 $f(x)=\sin|x|-\cos x$，$x\in[-\pi,\pi]$ 的一个单调递增区间为__________.

15. 过抛物线 $C$：$x^2=4y$ 的焦点 $F$ 的直线 $l$ 与 $C$ 交于 $A$，$B$ 两点，且 $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}$，$O$ 为坐标原点，则 $\triangle OAB$ 的面积为__________.

16. 已知函数 $f(x)=x^2-2x\log_a x$ 既有极小值又有极大值，则实数 $a$ 的取值范围是__________.

**四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17.（10 分）




如图，在 $\triangle ABC$ 中，角 $A,B,C$ 所对边长分别为 $a,b,c$，$\angle B=\dfrac{\pi}{4}$，满足 $(a+b)(\sin A-\sin B)=c(\sin B+\sin C)$.

（1）求 $\sin C$；

（2）点 $D$ 在 $BC$ 上，$AD\perp AC$，$AD=\sqrt{6}$，求 $AB$.

18.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+2, n\text{ 为奇数},\\ 2a_n, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

（1）记 $b_n=a_{2n}$，求证：数列 $\{b_n+2\}$ 是等比数列；

（2）若 $T_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，求 $T_{2n}$.

19.（12 分）

为发展体育运动增强学生体质，甲乙两班各 5 名同学进行羽毛球友谊赛，每人至多参加一场比赛，各场比赛互不影响，比赛胜者本班获得相应积分，负者班级积分为 0，其中甲班 5 名参赛学生的情况如下表：

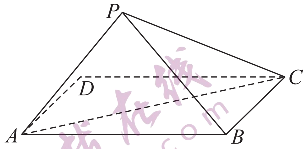
| 学生 | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 获胜概率 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 |
| 获胜积分 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 |

（1）若进行 5 场比赛，求甲班至多获胜 4 场的概率；

（2）若进行 3 场比赛，依据班级积分期望超过 10 为参赛资格，请问甲班 $BCD$ 三人组合是否具有参赛资格？请说明理由.

20. (12 分)

在矩形 $ABCD$ 中,$AB=\sqrt{2}BC=2\sqrt{2}$,将$\triangle ADC$ 沿 $AC$ 折起至$\triangle APC$ 的位置,且 $PB=2$.




(1)求证:平面 $PAB\perp$平面 $PBC$;

(2)求二面角 $P-AC-B$ 的正弦值.

21. (12 分)

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为 2,$P(4,6)$在 $C$ 上.

(1)求双曲线 $C$ 的方程;

(2)不经过点 $P$ 的直线 $l$ 与 $C$ 相交于 $M,N$ 两点,且 $PM\perp PN$,求证:直线 $l$ 过定点.

22. (12 分)

已知函数 $f(x)=e^{ax}$,$g(x)=2x+1$,若曲线 $y=f(x)$与 $y=g(x)$相切.

(1)求函数 $y=f(x)-g(x)$的单调区间;

(2)若曲线 $y=mf(x)$上存在两个不同点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$关于 $y$ 轴的对称点均在 $g(x)$图象上,

①求实数 $m$ 的取值范围;②证明:$x_1+x_2>2$.