2022-2023学年度下学期高三第二次模拟考试试题
数学参考答案

一. 1.A 2.D 3.D 4.A 5.D 6.D 7.C 8.B

二. 9.BD 10.BC 11.BD 12.ACD

三. 13. ±4 14. $y=-x$ 15. $\frac{9}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 16. $\frac{27}{\sin\theta}+\frac{8}{\cos\theta}$，$13\sqrt{3}$

四. 17. 解：（1）由图可知，$\frac{1}{4}T=\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$，所以 $T=\pi$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，…1分

$\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=0$，$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，…………3分

因为将函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度后得函数 g（x）的图像

所以 $g(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$，…………5分

(2) 因为 $g(x)=\cos 2x$ 所以 $g(A)=\cos 2A=\frac{7}{9}$，

由 $C=2A$，得 $A\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，$\sin 2A=\sqrt{1-\cos^2 2A}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$，

$\sin C=\frac{4\sqrt{2}}{9}$，$\cos C=\frac{7}{9}$，由 $\cos 2A=2\cos^2 A-1$，得 $\cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，由 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$，

得 $\sin A=\frac{1}{3}$，来源：高三答案公众号 …………7分

$\sin B=\sin(A+C)=\frac{1}{3}\times\frac{7}{9}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{23}{27}$，

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得 $c=\frac{a\sin C}{\sin A}=4\sqrt{2}$，…………8分

所以 $\triangle ABC$ 的面积

$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times3\times4\sqrt{2}\times\frac{23}{27}=\frac{46\sqrt{2}}{9}$. …………10分

18 解：（1）$a_1+a_2+a_3=87$，即 $a_1-1+a_2-1+a_3-1=84$，因为数列 $\{a_n-1\}$ 是等比数列，设公比为 q，得 $4+4q+4q^2=84$，解得 $q=4$ 或 $q=-5$（舍），…………2分，

所以 $a_n=4^n+1$ ……………3 分

因为 $S_n=\frac{1}{2}nb_{n+1}$，得当 $n\ge 2$ 时，有 $S_{n-1}=\frac{1}{2}(n-1)b_n$，作差可得 $(n+1)b_n=nb_{n+1}$，

所以 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 从第二项起是常数数列，又 $S_1=\frac{1}{2}b_2$ 得 $b_2=2$ ……………4 分

$n\ge 2,\frac{b_n}{n}=\frac{b_2}{2}=1$，$b_n=n$， ……………5 分

检验当 $n=1$ 时也成立，所以 $b_n=n$ ……………6 分

（2）$c_n=\frac{b_n}{a_n}=\frac{n}{4^n+1}<\frac{n}{4^n}$，所以 $c_1+c_2+\cdots+c_n<\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots+\frac{n}{4^n}$ ……………8 分

设 $S_n=\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots+\frac{n}{4^n}$，$\frac{1}{4}S_n=\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\frac{3}{4^4}+\cdots+\frac{n-1}{4^n}+\frac{n}{4^{n+1}}$，

$\frac{3}{4}S_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{n-1}{4^n}-\frac{n}{4^{n+1}}$，

所以 $S_n=\frac{4}{9}-(\frac{4}{9\cdot 4^n}+\frac{n}{3\cdot 4^n})<\frac{4}{9}$ ……………12 分

19.（1）连接 OA,OD，

因为 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，$OA\subset$ 平面 $ABCD$，$OD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PO\perp OA,PO\perp OD$．又 $PA=PD=\sqrt{5}$，$PO=2$，所以 $OA=OD=1$， ……………2 分

由四边形 $ABCD$ 是正方形，M 是 BC 中点，得 $AM=DM$，所以 $\Delta AOM\cong\Delta DOM$， ……………3 分

得 $\angle AOM=\angle DOM$，所以 $\Delta AOE\cong\Delta DOE$，$\angle OEA=\angle OED=90^0$，所以 $OE\perp AD$， …4 分

$AD=\sqrt{2}$，且 $OA=OD=1$，ΔADO 等腰直角三角形，$OE=\frac{1}{2}AD=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……………6 分

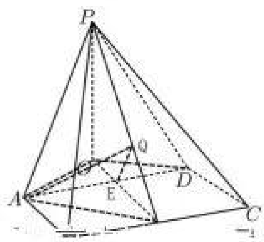
（2）法一

过 E 作 EQ 垂直 PM 于 Q，连接 AQ

因为 $AE\perp OE,AE\perp PO,PO\cap OE=O$，所以 $AE\perp$ 平面 POM，所以 $AQ\perp AM$， …8 分

$\angle AQE$ 为二面角 $A-PM-O$ 的平面角 ……………9 分

在直角 ΔPOM 中，$PO=2,OM=OE+EM=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，求得 $EQ=\frac{4\sqrt{17}}{17}$ ……10 分



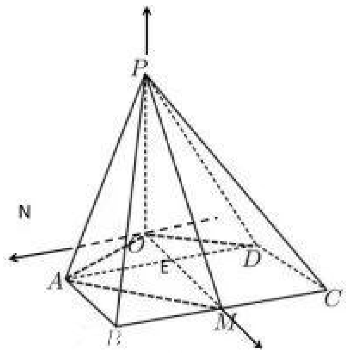
在直角ΔAEQ中得$AE=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\angle AQE=\frac{AE}{EQ}=\frac{\sqrt{34}}{8}$，　　…………11 分

$\cos\angle AQE=\frac{4\sqrt{2}}{7}$　　…………12 分

方法二

由（1）知$AD\perp OM$，过O作直线ON平行AD，如图. 以O为坐标原点，分别以$\overline{ON},\overline{OM},\overline{OP}$所在方向为$x$轴，$y$轴，$z$轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$，则

$A(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$，$M(0,\frac{3\sqrt{2}}{2},0)$，$P(0,0,2)$，$\overrightarrow{MA}=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2},0)$，



$\overrightarrow{PM}=(0,\frac{3\sqrt{2}}{2},-2)$来源：高三答案公众号　　…………7 分

设$\vec{m}=(x,y,z)$为平面PAM的一个法向量，则

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}y=0\\ \frac{3\sqrt{2}}{2}y-2z=0\end{cases}$$

令$y=1$，则$x=2$，$z=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，$\vec{m}=(2,1,\frac{3\sqrt{2}}{4})$，　　…………9 分

平面PMO的一个法向量为$\vec{n}=(1,0,0)$

设二面角为α，则

$$\cos\alpha=\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|2|}{\sqrt{2^2+1^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2}}=\frac{4\sqrt{2}}{7}$$　　…………11 分

二面角 A-PM-O 的余弦值为$\frac{4\sqrt{2}}{7}$.　　…………12 分

20. 解（1）由题意估计从该企业生产的正品中随机抽取 1000 件的平均数为：

$\bar{x}=185\times0.2=37$，　　　　　　　　　　　　　　…………2 分

所以 $\mu=37$，$\sigma=s=0.3$，则 $\mu-\sigma=37-0.3=36.7$，

$\mu+\sigma=37+0.3=37.3$ $\mu+2\sigma=37+0.6=37.6$，

则一等品内径在 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ 内，即 $(36.7,37.3)$，

二等品内径在 $(\mu+\sigma,\mu+2\sigma)$ 内，即 $(37.3,37.6)$，

所以该企业生产的产品为正品的概率为：

$P_1=P(36.7<X<37.6)=(0.8+1.1+0.8+0.65)\times0.2+0.4\times0.1=0.71$　　　…………4 分

（2）①从 $n+2$ 件正品中任选 2 个，有 C_{n+2}^2 种选法，其中等级相同的有 $C_n^2+C_2^2$ 种选法，

所以某箱产品抽检被记录为 B 的概率为：

$p=1-\dfrac{C_n^2+C_2^2}{C_{n+2}^2}=1-\dfrac{n^2-n+2}{n^2+3n+2}=\dfrac{4n}{n^2+3n+2}$.　　　…………6 分

②由题意，一箱产品抽检被记为 B 的概率为 p，则 5 箱产品恰有 3 箱被记录为 B 的概率为：

$f(p)=C_5^3p^3(1-p)^2=10p^3(1-2p+p^2)=10(p^3-2p^4+p^5)$，　　　…………8 分

$f'(p)=10(3p^2-8p^3+5p^4)=10p^2(3-8p+5p^2)=10p^2(p-1)(5p-3)$，

所以当 $p\in(0,\frac{3}{5})$ 时，$f'(p)>0$，函数 $f(p)$ 单调递增，

当 $p\in(\frac{3}{5}$，$1)$ 时，$f'(p)<0$，函数 $f(p)$ 单调递减，

所以当 $p=\frac{3}{5}$ 时，$f(p)$ 取得最大值 $f(\frac{3}{5})=C_5^3\times(\frac{3}{5})^3\times(1-\frac{3}{5})^2=\frac{216}{625}$，　　…………10 分

此时，$p=\dfrac{4n}{n^2+3n+2}=\dfrac{3}{5}$，解得 $n=3$.　　　　…………12 分

21. 解：（1）因为 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $4c^2=3a^2$，又焦点 F 到直线 l 的距离为 $\dfrac{5\sqrt{6}}{5}$，有 $\dfrac{|c|}{\sqrt{5}}=\dfrac{5\sqrt{6}}{5}$，

解得 $c=\sqrt{6},a=2\sqrt{2},b=\sqrt{2}$，　　　　…… 2 分

椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$　　　　…… 4 分

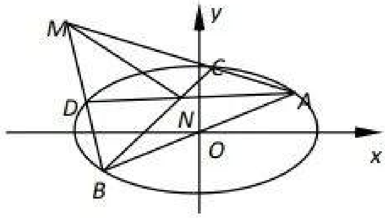
（2）由（1）知，椭圆 T 的方程为 $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$，从而可求得 A(2，1)，B(−2，−1)

①CA，CB 斜率都存在，即 k_1,k_2 存在. 设 $C(x_0,y_0)$，显然 $k_1\neq k_2$

从而 $k_1k_2=\dfrac{y_0-1}{x_0-2}\cdot\dfrac{y_0+1}{x_0+2}=\dfrac{y_0^2-1}{x_0^2-4}=\dfrac{2(1-\frac{x_0^2}{8})-1}{x_0^2-4}=\dfrac{1-\frac{x_0^2}{4}}{x_0^2-4}=-\dfrac{1}{4}$.　　…………6 分

②设 BD, AD 的斜率分别为 k_3,k_4 来源：高三答案公众号

设直线 AC 的方程为 $y-1=k_1(x-2)$，直线 BD 的方程为 $y+1=k_3(x+2)$.



由 $\begin{cases}y-1=k_1(x-2)\\ y+1=k_3(x+2)\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=\dfrac{2-2k_3-2k_1}{k_3-k_1}\\ y=\dfrac{2k_1-4k_3k_1}{k_3-k_1}+1\end{cases}$

从而点 M 的坐标为 $\left(\dfrac{2-2k_3-2k_1}{k_3-k_1},\ \dfrac{2k_1-4k_3k_1}{k_3-k_1}+1\right)$.　　…………8 分

因为 $k_3k_4=-\dfrac{1}{4}$. $k_1k_2=-\dfrac{1}{4}$

设直线是直线 AD 的方程为 $y-1=k_4(x-2)$，即 $y-1=-\dfrac{1}{4k_3}(x-2)$，

设直线 BC 的方程为 $y+1=k_2(x+2)$，即 $y+1=-\dfrac{1}{4k_1}(x+2)$

用 $-\dfrac{1}{4k_3}$ 代 k_1，$-\dfrac{1}{4k_1}$ 代 k_3 得点 N 的坐标为 $\left(\dfrac{2+\frac{2}{4k_1}+\frac{2}{4k_3}}{-\frac{1}{4k_1}+\frac{1}{4k_3}},\dfrac{-\frac{2}{4k_3}-\frac{1}{4k_3k_1}}{-\frac{1}{4k_1}+\frac{1}{4k_3}}-1\right)$.

即点 N 的坐标为 $\left(\dfrac{8k_1k_3+2k_3+2k_1}{k_1-k_3},\dfrac{2k_1+1}{k_3-k_1}+1\right)$　　………… 10 分

所以 $k_{MN}=\dfrac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\dfrac{\frac{-4k_1k_3-1}{k_3-k_1}}{\frac{2+8k_1k_3}{k_3-k_1}}=-\dfrac{1}{2}$　　…… 12 分

22. 解:

(1)　　…………1 分

$f'(x)=4-\dfrac{a}{x}-x=\dfrac{4x-a-x^2}{x}=-\dfrac{x^2-4x+a}{x}(x>0)$

令 $y=x^2-4x+a$，$\Delta=4(4-a)$

当 $a\geq 4$ 时，$\Delta\leq 0$，$f'(x)\leq 0$. f（x）在（0，+∞）上单调递减　　…………2 分

当$0<a<4$时，$\Delta>0$，$x^2-4x+a=0$的2个根为$x_1=2-\sqrt{4-a}$，$x_2=2+\sqrt{4-a}$

此时$x_1>0$，f（x）在（0，$2-\sqrt{4-a}$）上单调递减，在（$2-\sqrt{4-a}$，$2+\sqrt{4-a}$）上单调递增，在（$2+\sqrt{4-a}$，$+\infty$）上单调递减 …………3分

当$a\le 0$时，$\Delta>0$，$x^2-4x+a=0$的2个根为$x_1=2-\sqrt{4-a}$，$x_2=2+\sqrt{4-a}$

此时$x_1\le 0$，$x_2>0$，f（x）在（0，$2+\sqrt{4-a}$）上单调递增，在（$2+\sqrt{4-a}$，$+\infty$）上单调递减 …………4分

综上：$a\ge 4$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减

$0<a<4$时，$f(x)$在$\left(0,2-\sqrt{4-a}\right)$单调递减，在$\left(2-\sqrt{4-a},2+\sqrt{4-a}\right)$单调递增，在$\left(2+\sqrt{4-a},+\infty\right)$单调递减

$a\le 0$时，$f(x)$在（0，$2-\sqrt{4-a}$）上单调递增，在（$2+\sqrt{4-a}$，$+\infty$）上单调递减

…………5分

（2）由（1）可知$0<a<4$，且$x_1+x_2=4$，$x_1x_2=a$，

所以$f(x_1)+f(x_2)=\left(4x_1-a\ln x_1-\frac{1}{2}x_1^2\right)+\left(4x_2-a\ln x_2-\frac{1}{2}x_2^2\right)$

$=4(x_1+x_2)-a(\ln x_1+\ln x_2)-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)=a-a\ln a+8$， …………7分

要证$f(x_1)+f(x_2)<7+e-\ln x_1-\ln x_2$，即证$a-a\ln a+8<7+e-\ln a$，

只需证$1-a\ln a+a+\ln a-e<0$，

令$m(a)=1-a\ln a+a+\ln a-e$，$a\in(0,4)$，

则$m'(a)=-\ln a+\frac{1-a}{a}+1=\frac{1}{a}-\ln a$，

令$n(a)=m'(a)$，则$n'(a)=-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}<0$恒成立，

所以$m'(a)$在$a\in(0,4)$上单调递减，

又 $m'(1)=1>0$，$m'(2)=\frac{1}{2}-\ln 2<0$， …………8 分

由零点存在性定理得，$\exists a_0\in(1,2)$ 使得 $m'(a_0)=0$，

即 $\ln a_0=\frac{1}{a_0}$， …………9 分

所以 $a\in(0,a_0)$ 时，$m'(a)>0$，$m(a)$ 单调递增，

$a\in(a_0,4)$ 时，$m'(a)<0$，$m(a)$ 单调递减，

则 $m(a)_{\max}=m(a_0)=(1-a_0)\ln a_0+a_0+1-e=(1-a_0)\frac{1}{a_0}+a_0+1-e=a_0+\frac{1}{a_0}-e$，

…………10 分

因函数 $y=a_0+\frac{1}{a_0}-e$ 在 $a_0\in(1,2)$ 上单调递增，

所以 $a_0+\frac{1}{a_0}-e<2+\frac{1}{2}-e<0$，

所以 $m(a)<0$，即 $f(x_1)+f(x_2)<7+e-\ln(x_1)-\ln x_2$ …………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线