数　学

本试卷4页。满分150分。考试时间120分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡 并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$, $B=\{x|x+2a\geqslant 0\}$, 若 $A\cap B=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$, 则实数 $a=$

A. -2　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

2. 已知复数 $z=a+i(a\in\mathbf{R})$, $(z+1)(\bar{z}+1)=1$, 则 $\frac{z}{i}=$

A. $-1-i$　　B. $1-i$　　C. $-1+i$　　D. $1+i$

3. 在四边形 $ABCD$ 中, $A(-2,0)$, $B(-1,3)$, $C(3,4)$, $D(2,3)$, E, F 分别为边 AB, CD 的中点, 则 $\overrightarrow{EF}=$

A. $(4,2)$　　B. $(-4,-2)$　　C. $(8,4)$　　D. $(-8,-4)$

4. 在平面直角坐标系中, 角 α 的终边过点 $P(-3,1)$, 角 β 的终边与角 α 的终边关于直线 $y=x$ 对称, 则 $\cos(\beta-\alpha)=$

A. $-\frac{4}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

5. 已知 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, $a=\left(\frac{1}{2}\right)^{[illegible]}$, $b=2^{[illegible]}$, $c=2^{[illegible]}$, 则

A. $a>b>c$　　B. $c>b>a$　　C. $a>c>b$　　D. $c>a>b$

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正整数的等差数列, 记 S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_{11}=S_3$, $a_3<10$, 则 $a_{2023}=$

A. 2 022　　B. 2 023　　C. 4 049　　D. 4 054

7. 阅读不仅可以开阔视野,还可以提升语言表达和写作能力.某校全体学生参加的期末过程性评价中大约有30%的学生写作能力被评为优秀等级.经调查知,该校大约有20%的学生每天阅读时间超过1小时,这些学生中写作能力被评为优秀等级的占70%.现从每天阅读时间不超过1小时的学生中随机抽查一名,该生写作能力被评为优秀等级的概率为

A. 0.25　　B. 0.2　　C. 0.15　　D. 0.1

8. 药物半衰期指的是血液中的药物浓度(简称血药浓度)从最高血药浓度减低到最高值的二分之一所花费的时间.例如一种药物的半衰期为6小时,那么当血药浓度达到最高值后,过6个小时血药浓度为最高值的一半;再过6小时又减为一半,此时血药浓度为最高值的四分之一;……某人服用一种药物2小时后,血药浓度达到最高值,然后开始减低.若该药物的半衰期为4小时,则该药物血药浓度开始低于最高值的3%时的服药时间至少为(保留整数)(参考数据:$\ln 2\approx0.69$,$\ln 3\approx1.10$,$\ln 10\approx2.30$)

A. 12小时　　B. 21小时　　C. 23小时　　D. 30小时

9. 一个质地均匀的正八面体,八个面上分别标有数字1,2,…,8.任意抛掷一次这个正八面体,观察它与地面接触的面上的数字,得到样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.已知事件 A="与地面接触的面上的数字不大于4",B="与地面接触的面上的数字为偶数",C="与地面接触的面上的数字为质数",有以下说法:

①A,B 相互独立;②B,C 相互独立;③$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$;④$P(\overline{C}|B)=\frac{3}{4}$.

其中正确说法的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

10. 已知圆 $Q:(x-2)^2+(y-2)^2=2$,O 为坐标原点,以 OQ 为直径作圆 Q',交圆 Q 于 A,B 两点,则△OAB 的面积为

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$　　C. 3　　D. $\frac{3}{2}$

11. 已知 F_1,F_2 为双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点,过点 F_2 作直线 l 与 E 的右支交于 A,B 两点,$\angle AF_2F_1$,$\angle BF_2F_1$ 的平分线分别交 y 轴于 M,N 两点,O 为坐标原点.若 $|OM|$,$2a$,$|ON|$ 成等比数列,则 E 的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

12. 已知正实数 a,b 满足 $abe^a+\ln b+1=0$,则

A. $b>\frac{1}{e}$　　B. $a<1$　　C. $ab=1$　　D. $e^a<\frac{1}{b}$

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. $\left(1+\frac{2x}{y}\right)(x-y)^6$ 的展开式中含 x^4y^2 项的系数是________.(结果用数字表示)

14. 由共斜边的两块直角三角板拼成一个平面四边形 $ABCD$,其中△ABC 为以 B 为直角的等腰直角三角形,△ACD 为以 D 为直角的直角三角形,且 $AC=2CD$.若 $AB=2$,则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=$________.

15. 已知抛物线 $C:y^2=4x$,O 为坐标原点,过点 $M(m,0)(m>0)$ 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点.当 $\tan\angle AOB=2$ 时,△AOB 的面积为12,则实数 $m=$________.

16. 在四面体 $SABC$ 中,$SA\perp$平面 ABC,$AB\perp AC$,$SB=SC=\sqrt{7}$,$BC=2\sqrt{3}$.若直线 l 与 SA 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$,则直线 l 与平面 SBC 所成角的取值范围是________.

三、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10分）

记△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$A=\frac{\pi}{4}$，$\sin B=\frac{3\sqrt{2}}{4}\sin C$.

（1）求$\frac{b^2-a^2}{c^2}$的值；

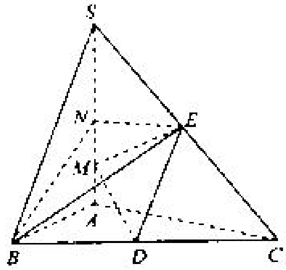
（2）若△ABC的外接圆半径为$\sqrt{10}$，求△ABC的面积.

18.（12分）

如图，在三棱锥$S-ABC$中，$SA\perp$底面ABC，$AB\perp AC$，$SA=4$，$AB=2$，$AC=2\sqrt{3}$，D，E分别为BC，SC的中点，点M，N都在棱SA上，$AM=1$，且满足DM∥平面BEN.

（1）求AN的长；

（2）求平面BEN与平面DEM夹角的余弦值.



19.（12分）

为积极推动现有多层住宅电梯加装工作，某市房管局制定了《既有多层住宅加装电梯不同楼层业主出资区间指导方案》（以下简称《方案》），并广泛征求居民意见，调研是否同意该方案．工作人员随机调研了全市多幢5层楼的居民，得到如下数据：

楼层	1楼		2楼		3楼		4楼		5楼	
意见类别	同意	不同意	同意	不同意	同意	不同意	同意	不同意	同意	不同意
户数	80	120	90	110	110	90	120	80	160	40

（1）完成下面的2×2列联表，根据小概率值$\alpha=0.001$的独立性检验，能否据此推断同意《方案》与居住楼层高于3层有关？

	同意《方案》	不同意《方案》	合计
1—3楼户数			
4—5楼户数			
合计			

（2）将以上数据中每层楼居民同意《方案》的频率视为该层居民同意该方案的概率，且居民是否同意《方案》之间互不影响．若在该市随机抽取一处老旧社区，对一幢5层楼的10户居民（每层选取2户居民）投放问卷．设X为居住在4楼和5楼的居民中不同意《方案》的户数，求X的分布列及数学期望.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

α	0.05	0.01	0.001
x_α	3.841	6.635	10.828

20.（12分）

记各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的前n项和是S_n，已知$S_n=a_n+\frac{4}{3}a_{n+1}-4(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{na_n\}$的前n项和T_n.

21.（12分）

已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别是$A$，$B$，过点$M(-5,0)$的直线$l$交$E$于$C$，$D$两点（异于$A$，$B$），当直线$l$过点$P(-1,1)$时，$P$恰好为$CD$的中点.

（1）求E的离心率；

（2）若$|AB|=4$，直线AD与BC交于点Q，直线QA，QM，QB的斜率分别为k_1，k_2，k_3，证明：$\frac{k_1+k_3}{k_2}$是定值.

22.（12分）

已知函数$f(x)=e^x$，$g(x)=\ln(x+n)$，直线$l:y=x+m$为曲线$y=f(x)$与$y=g(x)$的一条公切线.

（1）求m，n；

（2）若直线$l':y=s(0<s<1)$与曲线$y=f(x)$，直线l，曲线$y=g(x)$分别交于$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$三点，其中$x_1<x_2<x_3$，且x_1，x_2，x_3成等差数列，求s的个数.

2023届高三第一次学业质量联合检测·数学

一、选择题

1. B 【解析】由题意得 $B=\{x\mid x\geqslant -2a\}$，因为 $A\cap B=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$，所以 $-2a=1$，解得 $a=-\frac{1}{2}$.

2. D 【解析】由 $(z+1)(\bar{z}+1)=z\bar{z}+z+\bar{z}+1=a^2+1+2a+1=1$，得 $a=-1$，所以 $z=-1+i$，故 $\frac{z}{i}=\frac{-1+i}{i}=\frac{(-1+i)i}{i^2}=\frac{-i-1}{-1}=1+i$.

3. A 【解析】由题意得 $E\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$，$F\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$，所以 $\overrightarrow{EF}=\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)-\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=(4,2)$.

4. B 【解析】由题意得角 β 的终边过点 $(1,-3)$，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\sin\beta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，故 $\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha=-\frac{3}{5}$.

5. D 【解析】由题意得 $a=2^{\sin x}$，$b=2^{\cos x}$. 因为当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\tan x>\sin x>\cos x$，且 $y=2^x$ 是增函数，所以 $c>a>b$.

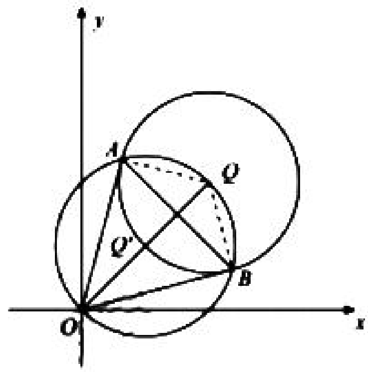
6. C 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $d\in\mathbf{N}$. 由等差数列的性质，得 $a_{11}=S_5=3a_3$，即 $a_2+9d=3a_2$，则 $9d=2a_2$. 因为 a_2 为正整数，且 $a_2<10$，所以 $d=2$，$a_2=9$，故 $a_{2\,022}=a_2+2\,020d=4\,049$.

7. B 【解析】设写作能力被评为优秀等级为事件 A，每天阅读时间超过1小时为事件 B，则 $P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})=P(A|B)\times P(B)+P(A|\bar{B})\times P(\bar{B})$，即 $30\%=20\%\times70\%+(1-20\%)\times P(A|\bar{B})$，解得 $P(A|\bar{B})=0.2$，故从每天阅读时间不超过1小时的学生中随机抽查一名，该生写作能力被评为优秀等级的概率为0.2.

8. C 【解析】设服药 t 小时后血药浓度开始低于最高值的 3%，则 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t-2}{4}}<3\%$，即 $\frac{t-2}{4}>\log_{\frac{1}{2}}0.03=\frac{\ln 0.03}{-\ln 2}=\frac{-\ln 3+2\ln 10}{\ln 2}\approx\frac{3.5}{0.69}\approx5.07$，得 $t>22.28$，所以服药时间至少为23小时.

9. C 【解析】由题意得 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$，$P(AB)=\frac{1}{4}$，$P(BC)=\frac{1}{8}$，$P(ABC)=\frac{1}{8}$，$P(B\bar{C})=\frac{3}{8}$，所以 $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(BC)\neq P(B)P(C)$，$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，$P(\bar{C}|B)=\frac{P(B\bar{C})}{P(B)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$，故①③④正确，②错误.

10. A 【解析】如图，连接 AQ，BQ，由题意知圆 Q' 的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$，圆 Q 与圆 Q' 的半径均为 $\sqrt{2}$，且 $OA\perp AQ$，$|OQ|=2|AQ|$，故 $\angle AOQ=\frac{\pi}{6}$，同理可得 $\angle BOQ=\frac{\pi}{6}$，则 $OA=OB=\sqrt{6}$，$\triangle OAB$ 为等边三角形，所以 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



11. C 【解析】由题意知 $MF_1\perp NF_1$，且 $\triangle OF_1M\backsim\triangle ONF_1$，所以 $\frac{|OM|}{|OF_1|}=\frac{|OF_1|}{|ON|}$，即 $|OM||ON|=c^2$. 又 $|OM|$，$2a$，$|ON|$ 成等比数列，故 $|OM||ON|=4a^2=c^2$，则 $c=2a$，所以双曲线 E 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=2$.

12. D 【解析】因为 $abe^a+\ln b+1=0$，所以 $ae^a=\frac{-\ln b-1}{b}>0$，故 $\ln b+1<0$，即 $0<b<\frac{1}{e}$，故选项A错误；若 $a=1$，则 $eb+\ln b+1=0$，作出函数 $y=\ln x$ 与 $y=-ex-1$ 的图象，显然有交点，则方程 $eb+\ln b+1=0$ 有解，故选项B错误；若 $ab=1$，则 $e^a-\ln a+1=0$，即 $e^a=\ln a-1$，作出函数 $y=e^x$ 与 $y=\ln x-1$ 的图象，显然无交点，则方程 $e^a-\ln a+1=0$ 无解，故选项C错误；因为 $abe^a+\ln b+1=0$，则 $ae^a+\frac{1}{b}=-\frac{\ln b}{b}=$

$-\ln b\cdot e^{-\ln b}>ae^a$，且$-\ln b>0$，令$f(x)=xe^x(x>0)$，则$f'(x)=(x+1)e^x>0$，所以$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，所以$f(-\ln b)>f(a)$，即$-\ln b>a$，因此$e^a<\frac{1}{b}$，故选项 D 正确.

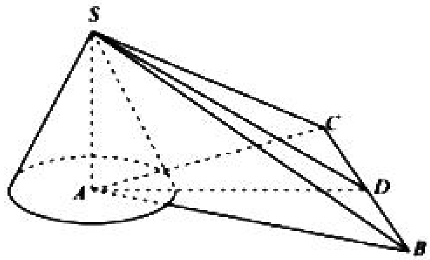
二、填空题

13. -25【解析】展开式中含x^4y^2项的系数是$C_6^2\cdot(-1)^2+2\times C_6^3\times(-1)^3=15-40=-25$.

14. 2【解析】由题意知$BC=AB=2$，$AC=2\sqrt{2}$，$AD=\sqrt{6}$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$，$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BA}+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\cdot\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{AD}^2=-2^2+(\sqrt{6})^2=2$.

15. 6【解析】因为$\triangle AOB$的面积为$\frac{1}{2}|OA||OB|\sin\angle AOB=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\tan\angle AOB=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=12$.
设直线l的方程为$x=ky+m(m>0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立$\begin{cases}y^2=4x,\\x=ky+m,\end{cases}$得$y^2-4ky-4m=0$，则$y_1y_2=-4m$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{16}y_1^2y_2^2+y_1y_2=m^2-4m=12$，解得$m=6$或$m=-2$（舍去）.

16. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$【解析】如图，设$BC$的中点为$D$，连接$SD$，$AD$，因为$SA\perp$平面$ABC$，$SB=SC=\sqrt{7}$，所以$AB=AC$，所以$AD\perp BC$，$BC\perp SD$，所以$\angle ADS$为二面角$S$-$BC$-$A$的平面角，又$AB\perp AC$，$BC=2\sqrt{3}$，所以$AB=AC=\sqrt{6}$，$AD=\sqrt{3}$，$SA=1$，故$\angle ASD=\frac{\pi}{3}$，直线$l$不妨看作以$SA$为轴，轴截面的顶角为$\frac{\pi}{3}$的圆锥母线所在的直线，所以直线$l$与平面$SBC$所成角的最小值为$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，最大值为$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，故直线$l$与平面$SBC$所成角的取值范围是$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$.



三、解答题

17. 解：(1)在$\triangle ABC$中，由正弦定理及已知，得$b=\frac{3\sqrt{2}}{4}c$. （1分）

又$A=\frac{\pi}{4}$，由余弦定理，得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=\frac{9}{8}c^2+c^2-2\times\frac{3\sqrt{2}}{4}c\times c\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5}{8}c^2$. （3分）

所以$\frac{b^2-a^2}{c^2}=\frac{\frac{9}{8}c^2-\frac{5}{8}c^2}{c^2}=\frac{1}{2}$. （5分）

(2)在$\triangle ABC$中，由正弦定理，得$\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{10}$，

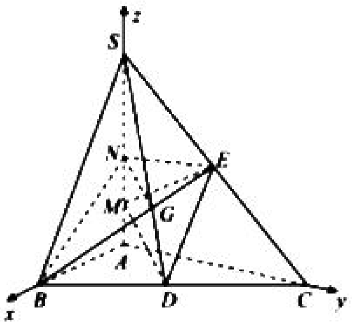
则$a=2\sqrt{5}$. （7分）

由(1)得$c=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}a=4\sqrt{2}$， （8分）

$b=\frac{3\sqrt{2}}{4}c=6$. （9分）

所以$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times6\times4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=12$. （10分）

18. 解：(1)如图，连接SD，交BE于点G，连接NG，则平面$SMD\cap$平面$BEN=NG$.
因为$DM//$平面BEN，$DM\subset$平面SMD，
所以$DM//NG$. （2分）
因为D，E分别为BC，SC的中点，
所以点G为$\triangle SBC$的重心，所以$SG=2GD$，
所以$SN=2NM$. （3分）
由题意知$AM=\frac{1}{4}SA$，则N是SA的中点，$AN=\frac{1}{2}SA=2$. （5分）



(2)由题意知$SA\perp$底面ABC，$AB\perp AC$，所以AB，AC，AS两两垂直，以点A为坐标原点，AB，AC，AS所在直线分别为x，y，z轴，建立空间直角坐标系如图，则$A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(0,2\sqrt{3},0)$，$S(0,0,4)$，$D(1,\sqrt{3},0)$，$E(0,\sqrt{3},2)$，$N(0,0,2)$，$M(0,0,1)$.
所以$\overrightarrow{BE}=(-2,\sqrt{3},2)$，$\overrightarrow{BN}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{DE}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{DM}=(-1,-\sqrt{3},1)$. （6分）
设平面BEN的法向量为$\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，
则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BN}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2x_1+\sqrt{3}y_1+2z_1=0,\\-2x_1+2z_1=0.\end{cases}$
令$x_1=1$，则$y_1=0$，$z_1=1$，
所以平面BEN的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(1,0,1)$. （8分）
设平面DEM的法向量为$\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。