

准考证号 _____

绝密★启用前

湘豫名校联考

2022年12月高三上学期期末摸底考试

数学(理科)

注意事项:

1. 本试卷共6页。时间120分钟,满分150分。答题前,考生先将自己的姓名、准考证号填写在试卷指定位置,并将姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上,然后认真核对条形码上的信息,并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 作答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。作答非选择题时,将答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将试卷和答题卡一并收回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\frac{6}{x} \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 2t + 3, t \in A\}$, 则 $A \cap B =$ ()

| | |
|---------------------|------------------------|
| A. $\{-1, 1, -3\}$ | B. $\{-1, -3\}$ |
| C. $\{-1, -3, -6\}$ | D. $\{-1, 1, -3, -6\}$ |
2. 已知 i 为虚数单位, $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), 若 $(\bar{z} + 1 - a)[z + (1 - b)i] = -2ai$, 则复数 z 在复平面上对应的点位于 ()

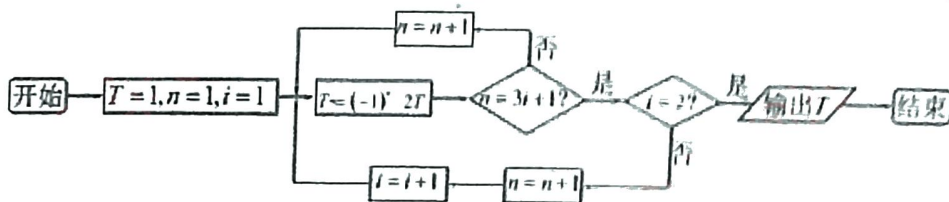
| | |
|---------|---------|
| A. 第一象限 | B. 第二象限 |
| C. 第三象限 | D. 第四象限 |
3. 等额分付资本回收是指起初投资 P , 在利率 i , 回收周期数 n 为定值的情况下, 每期期末取出的资金 A 为多少时, 才能在第 n 期期末把全部本利取出, 即全部本利回收, 其计算公式为: $A = P \cdot \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$. 某农业种植公司投资33万元购买一大型农机设备, 期望投资收益年利率为10%. 若每年年底回笼资金8.25万元, 则该公司将至少在 () 年内能全部收回本利和. ($\lg 11 \approx 1.04, \lg 5 \approx 0.70, \lg 3 \approx 0.48$)

| | | | |
|------|------|------|------|
| A. 4 | B. 5 | C. 6 | D. 7 |
|------|------|------|------|
4. 在 $\left(1 - \frac{2}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}$ 的展开式中, $\frac{1}{x^2}$ 的系数为 ()

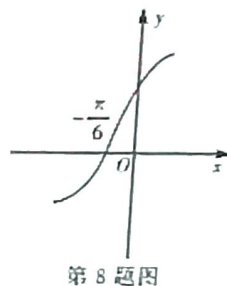
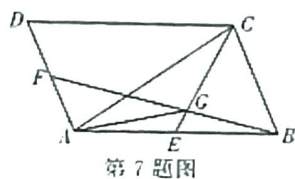
| | | | |
|--------|--------|--------|-------|
| A. -30 | B. -20 | C. -10 | D. 30 |
|--------|--------|--------|-------|

数学(理科)试题 第1页(共6页)

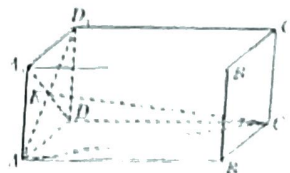
5. 执行如下图所示的程序框图, 则输出的 T 为 ()



- A. 128 B. -32 C. 16 D. -64
6. 已知圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$ 与过原点 O 的直线 $l: y = kx (k \neq 0)$ 相交于 A, B 两点, 点 $P(m, 0)$ 为 x 轴上一点, 记直线 PA, PB 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $k_1 + k_2 = 0$, 则实数 m 的值为
- A. -3 B. -2 C. 2 D. 3
7. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FD}$, 点 G 为 CE 与 BF 的交点, 则 $\overrightarrow{AG} =$
- A. $\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ B. $\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ C. $\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{15}\overrightarrow{AC}$ D. $\frac{3}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$



8. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) (\omega \in \mathbb{N}^*, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示, 且函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{7\pi}{12}$ 处取得最小值, 则函数 $f(\frac{x}{2})$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调递减区间为
- A. $[0, \frac{\pi}{6}]$ B. $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$
C. $[0, \frac{\pi}{12}]$ D. $[\frac{\pi}{6}, \pi]$
9. 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, $SC \perp$ 平面 $ABCD, AB \parallel CD, AB \perp AD, AD = CD = 1, SD = AB = 2$, 点 E 为 SB 的中点, 则异面直线 SD 与 CE 所成角的余弦值为
- A. $\frac{\sqrt{5}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$
10. 如图, 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 16, $AB = 2AA_1 = 2BC, AD_1$ 与 A_1D 相交于点 E , 则三棱锥 $E-ACD$ 的外接球的表面积为
- A. 12π B. 16π
C. 20π D. 36π



11. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 为第一象限内双曲线上的点, 点 Q 为点 P 关于原点 O 的对称点. 若 $|OP| = |OF_2|, 2|QF_1| \leq |PF_1| \leq 3|QF_1|$, 则双曲线 C 的离心率的取值范围为 ()

- A. $\left[1, \frac{\sqrt{10}}{2}\right]$ B. $\left[\frac{\sqrt{10}}{2}, \sqrt{5}\right]$ C. $(1, \sqrt{5}]$ D. $[2, \sqrt{5}]$

12. 已知 $f(x), g(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的函数, 且均不恒为零. $g(x)$ 为偶函数, $f(10) = -3$. 若对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+4) + f(x) = \sqrt{2}f(x+2)$, 设 $h(x) = (x-2) \cdot g(x)$, 若函数 $h(x+2)$ 的图象关于 y 轴对称, 则下列说法正确的是 ()

- A. 函数 $f(x)$ 的一个周期为 8 B. 函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=6$ 对称
C. 函数 $g(x)$ 的一个周期为 4 D. $f(98) + g(98) = 3$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 小明的外婆来到蔬菜超市, 准备从黄瓜、南瓜、丝瓜、苦瓜、白瓜这 5 种新鲜瓜类蔬菜中任意购买 3 种, 则小明的外婆购买的瓜类蔬菜中含苦瓜的概率为_____.

14. 已知点 $P(x_0, y_0)$ 关于 x 轴的对称点在曲线 $C: y = 2\sqrt{2x}$ 上, 且过点 P 的直线 $y = x - 2$ 与曲线 C 相交于点 Q , 则 $|PQ| =$ _____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \left(-\frac{4}{5}\right)^n \cdot \frac{n+1}{2}$, 设数列 $\{a_n\}$ 的最大项和最小项分别为 M, N , 则 $M+N =$ _____.

16. 已知直线 $y = kx + b$ 为曲线 $f(x) = \ln x$ 的一条切线, 则 $k \cdot b$ 的取值范围为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 20 分)

已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1 = 1$, 且 $\frac{S_n}{S_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - 1}{a_{n+1} + 1}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{3^n - 1}$, 且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < \frac{9}{4}$.

18. (本小题满分 12 分)

在斜三角形 ABC 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $a \sin A + 4b \sin C \cos^2 A = b \sin B + c \sin C$.

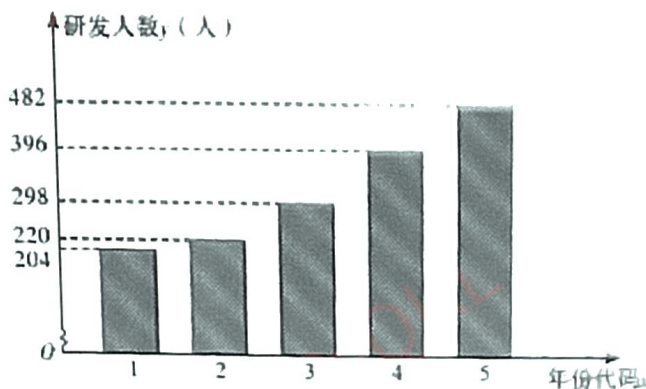
(1) 求角 A 的大小;

(2) 当 $a = 3$ 时, 求 $b+c$ 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

随着电池充电技术的逐渐成熟,以锂电池为动力的新一代锂电池产品,以其轻巧便携、工作效率高、环保、可适应多种应用场景下的工作等优势,深受终端消费者青睐.在便携无绳化需求与技术发展的双重驱动下,锂电类无绳电动工具及配套设施等产品的望持续扩大.某公司为适应市场并增强市场竞争力,逐年增加研发投入,使得研发体系及创新能力持续提升,现对 2017~2021 年的研发人数作了相关统计,如下表.

2017~2021 年公司的研发人数情况 (年份代码 1~5 为顺序编号)



- (1) 根据条形统计图中数据,计算该公司研发人数 y 与年份代码 x 的相关系数 r ,并判断其相关性的强弱;
- (2) 试求出 y 关于 x 的线性回归方程,并预测 2023 年该公司的研发人数 (结果取整数)

参考数据: $\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 55\,960$, $\sqrt{1\,399} \approx 37.4$.

参考公式: 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$.

线性回归方程的斜率 $b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, 截距 $a = \bar{y} - b\bar{x}$.

附:

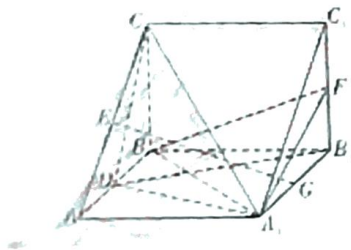
| $ r $ | $[0, 0.25]$ | $[0.30, 0.75]$ | $[0.75, 1]$ |
|-------|-------------|----------------|-------------|
| 相关性 | 弱 | 一般 | 强 |

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp BC$, 侧面 AA_1B_1B 为正方形, 点 D, E, F, G 分别为棱 AB, AC, B_1C_1, A_1B_1 的中点.

(1) 求证: $GE \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ;

(2) 若二面角 B_1-A_1D-C 的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{21}$, 且 $AB=2$, 求多面体 $ABCA_1FC_1$ 的体积.



21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 上顶点为 A . 钝角三角形 AF_1F_2 的面积为 $\sqrt{3}$, 斜率为 k 的直线 l 交椭圆 C 于 P, Q 两点. 当直线 l 经过 F_1, A 两点时, 点 F_2 到直线 l 的距离为 $\sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 当直线 l 的纵截距不为零时, 试问是否存在实数 k , 使得 $|\overrightarrow{PQ}|^2 + 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 为定值? 若存在, 求出此时 $\triangle OPQ$ 面积的最大值; 若不存在, 请说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线