

安徽六校教育研究会 2024 届高三入学素质测试

数学试题

注意事项:

1. 本试卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟。
2. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
4. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 4\}$, $N = \{x \mid \frac{x-2}{x+1} \geq 0\}$, 则 $M \cap N =$
 A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{-2, 2\}$ C. $\{-2\}$ D. 2
2. 复数 z 在复平面内对应的点为 $(\sqrt{3}, -1)$, 则 $\frac{1-i}{|z|+i} =$
 A. $\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$ B. $\frac{3}{5} - \frac{3}{5}i$ C. $\frac{1}{5} - \frac{1}{5}i$ D. $-\frac{1}{5} - \frac{1}{5}i$
3. 已知 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$, $\tan \alpha \tan \beta = \frac{1}{3}$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$
 A. $-\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $\frac{2}{3}$
4. 已知向量 \vec{m}, \vec{n} , 且 $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1, |\sqrt{3}\vec{m} - 2\vec{n}| = \sqrt{7}$, 则向量 \vec{m} 在向量 \vec{n} 方向上的投影向量为
 A. $\vec{0}$ B. $\frac{1}{2}\vec{m}$ C. $\frac{1}{2}\vec{n}$ D. $-\frac{1}{2}\vec{n}$
5. 已知 $A(-1, 0), B(2, 0)$, 若动点 M 满足 $|MB| = 2|MA|$, 直线 $l: x + y - 2 = 0$ 与 x 轴、 y 轴分别交于两点, 则 $\triangle MPQ$ 的面积的最小值为
 A. $4 + 2\sqrt{2}$ B. 4 C. $2\sqrt{2}$ D. $4 - 2\sqrt{2}$
6. 设 $\{a_n\}$ 为等比数列, 则“对于任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+2} < a_n$ ”是“ $\{a_n\}$ 为递减数列”的
 A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. 若 $1 < m < 4$, 椭圆 $C: \frac{x^2}{m} + y^2 = 1$ 与双曲线 $D: \frac{x^2}{4-m} - \frac{y^2}{m} = 1$ 的离心率分别为 e_1, e_2 , 则
 A. $\frac{e_1}{e_2}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$ B. $\frac{e_1}{e_2}$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 C. $\frac{e_1}{e_2}$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$ D. $\frac{e_1}{e_2}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$
8. 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x) - \frac{2}{e^x+1}$, 则不等式 $f(x) + f(2x-1) > -2$ 的解集是
 A. $(\frac{1}{3}, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-\infty, \frac{1}{3})$ D. $(-\infty, 1)$

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 为了解中学生参与课外阅读的情况,某校一兴趣小组持续跟踪调查了该校某班全体同学10周课外阅读的时长,经过整理得到男生、女生这10周课外阅读的平均时长(单位:h)的数据如下表:

女生	7.0	7.3	7.5	7.8	8.4	8.6	8.9	9.0	9.2	9.3
男生	6.1	6.5	6.9	7.5	7.7	8.0	8.1	8.2	8.6	9.4

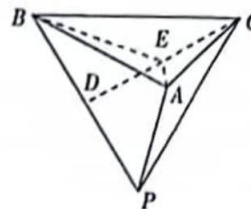
以下判断中正确的是

- A. 该班男生每周课外阅读的平均时长的平均值为7.85
 B. 该班女生每周课外阅读的平均时长的80%分位数是9.0
 C. 该班女生每周课外阅读的平均时长波动性比男生小
 D. 由该班估计该校男生每周课外阅读的平均时长不低于8h的概率为0.5
10. 某地下车库在排气扇发生故障的情况下测得空气中一氧化碳含量达到了危险状态,经抢修排气扇恢复正常,排气4分钟后测得车库内的一氧化碳浓度为81 ppm,继续排气4分钟后又测得浓度为27 ppm. 由检验知该地下车库一氧化碳浓度 y (ppm) 与排气时间 t (分钟) 之间存在函数关系 $y = f(t)$, 其中 $\frac{f'(t)}{f(t)} = R$ (R 为常数). (注: $[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$) 若空气中一氧化碳浓度不高于0.5 ppm 为正常, 人就可以安全进入车库了. 则

- A. $R = -\frac{\ln 3}{4}$
 B. $R = e^{-\frac{1}{4}}$
 C. 排气20分钟后, 人可以安全进入车库
 D. 排气24分钟后, 人可以安全进入车库
11. 高斯是德国著名的数学家, 近代数学奠基者之一, 享有“数学王子”的称号. 设 $x \in \mathbb{R}$, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, $y = [x]$ 也被称为“高斯函数”, 例如: $[-3.5] = -4$, $[2.1] = 2$. 已知函数 $f(x) = [x+2] - x$, 下列说法中正确的是
- A. $f(x)$ 是周期函数
 B. $f(x)$ 的值域是 $(1, 2]$
 C. $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是增函数
 D. 若方程 $f(x) = k(x+1) + 1$ 有3个不同实根, 则 $\frac{1}{3} < k \leq \frac{1}{2}$

12. 如图所示, 有一个棱长为4的正四面体 $P-ABC$ 容器, D 是 PB 的中点, E 是 CD 上的动点, 则下列说法正确的是

- A. 直线 AE 与 PB 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$
 B. $\triangle ABE$ 的周长最小值为 $4 + \sqrt{34}$
 C. 如果在这个容器中放入1个小球(全部进入), 则小球半径的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$
 D. 如果在这个容器中放入4个完全相同的小球(全部进入), 则小球半径的最大值为 $\frac{2\sqrt{6}-2}{5}$

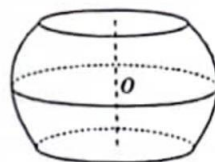


三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 第六届进博会招募志愿者,某校高一年级有3位同学报名,高二年级有5位同学报名,现要从报名的学生中选取4人,要求高一年级和高二年级的同学都有,则不同的选取方法种数为_____。(结果用数值表示)

14. 18世纪英国数学家辛卜森运用定积分,推导出了现在中学数学教材中柱、锥、球、台

等几何体 Ω 的统一体积公式 $V = \frac{1}{6}h(L + 4M + N)$ (其中 L, N, M, h 分别为 Ω 的上底面面积、下底面面积、中截面面积和高),我们也称为“万能求积公式”.例如,已知球的半径为 R ,可得该球的体积为 $V = \frac{1}{6} \times 2R(0 + 4 \times \pi R^2 + 0) = \frac{4}{3} \pi R^3$;已知正四



棱锥的底面边长为 a ,高为 h ,可得该正四棱锥的体积为 $V = \frac{1}{6} \times h[0 + 4 \times (\frac{a}{2})^2 + a^2] = \frac{1}{3} a^2 h$.

类似地,运用该公式求解下列问题:如图,已知球 O 的表面积为 $16\pi \text{ cm}^2$,若用距离球心 O 都为 1 cm 的两个平行平面去截球 O ,则夹在这两个平行平面之间的几何体 Π 的体积为_____ cm^3 .

15. 已知 M, N 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上关于原点对称的两点,点 M 在第一象限且与点 Q 关于 x 轴对称,

$\overrightarrow{ME} = \frac{4}{3} \overrightarrow{MQ}$,直线 NE 交双曲线的右支于点 P ,若 $PM \perp MN$,则双曲线的离心率 e 为_____.

16. 已知函数 $f(x) = 2\cos x - \sin 2x$ 给出下列结论:

- ① $y = f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 对称;
- ② $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \pi$ 对称;
- ③ $f(x)$ 是周期函数;
- ④ $f(x)$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

其中正确结论有_____. (请填写序号)

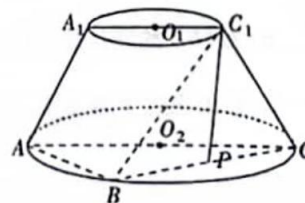
四、解答题:本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

7. (本小题10分)已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,且 $\frac{2a-c}{\cos C} = \frac{b}{\cos B}$.

- (1) 求角 B 的大小;
- (2) 若 BC 的中点为 D 且 $AD = \sqrt{3}$,求 $a + 2c$ 的最大值.

8. (本小题12分)如图,圆台 O_1O_2 的轴截面为等腰梯形 A_1ACC_1 , $AC = 2AA_1 = 2A_1C_1 = 4$, B 为下底面圆周上异于 A, C 的点.

- (1) 点 P 为线段 BC 的中点,证明直线 $PC_1 \parallel$ 面 AA_1B ;
- (2) 若四棱锥 $B - A_1ACC_1$ 的体积为 $2\sqrt{3}$,求直线 AB 与平面 C_1CB 夹角的正弦值.



19. (本小题 12 分) 已知函数 $f(x) = ae^x - x$ (e 是自然对数的底数).

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $g(x) = ae^x(x-1) - \ln x + f(x)$ 有两个零点, 求实数 a 的取值范围.

20. (本小题 12 分) 为纪念中国共产党成立 102 周年, 学校某班组织开展了“学党史, 忆初心”党史知识竞赛活动, 抽取四位同学, 分成甲、乙两组, 每组两人, 进行对战答题. 规则如下: 每次每位同学给出 6 道题目, 其中有一道是送分题(即每位同学至少答对 1 题). 若每次每组答对的题数之和为 3 的倍数, 原答题组的人再继续答题; 若答对的题数之和不是 3 的倍数, 就由对方组接着答题. 假设每位同学每次答题之间相互独立. 求:

(1) 若第一次由甲、乙组答题是等可能的, 求第 2 次由乙组答题的概率;

(2) 若第一次由甲组答题, 记第 n 次由甲组答题的概率为 P_n , 求 P_n .

21. (本小题 12 分) 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 且 $q \neq 1, q \in \mathbb{N}^*$. 令 $b_n = \frac{n^2 + n}{\log_7 a_n}$, 记 T_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 若 $4a_2 = a_1 a_3, S_2 + T_3 = 67$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且 $S_{99} - \log_2 T_{99} = 99$, 求 q .

22. (本小题 12 分) 已知抛物线 $E: x^2 = 2py$ (p 为常数, $p > 0$). 点 $M(x_0, y_0)$ 是抛物线 E 上不同于原点的任意一点.

(1) 若直线 $l: y = \frac{x_0}{2}x - y_0$ 与 E 只有一个公共点, 求 p ;

(2) 设 P 为 E 的准线上一点, 过 P 作 E 的两条切线, 切点为 A, B , 且直线 PA, PB 与 x 轴分别交于 C, D 两点.

① 证明: $PA \perp PB$.

② 试问 $\frac{|PC| \cdot |AB|}{|PB| \cdot |CD|}$ 是否为定值? 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

 自主选拔在线