

内部资料·注意保存

试卷类型：B

江门市 2023 年普通高中高一调研测试（二）

数 学

本试卷共 6 页，22 小题，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡规定的位置上。
2. 做选择题时，必须用 2B 铅笔将答题卷上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，必须用黑色字迹钢笔或签字笔，将答案写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上作答无效。
5. 考试结束后，将答题卡交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $z = \frac{7+i}{1-i}$ 的虚部是
A. 3 B. $4i$ C. 4 D. i
2. 某小组有 1 名男生和 2 名女生，从中任选 2 名学生参加象棋比赛，事件“至多有 1 名男生”与事件“至多有 1 名女生”是
A. 对立事件 B. 必然事件 C. 互斥事件 D. 相互独立事件
3. 小红参加学校举行的演讲比赛，6 位评委对她的评分如下：82, 78, 85, 81, 90, 88，若选手的最终得分计算需要去掉一个最低分和一个最高分，则小红的最终得分的平均数和方差分别为
A. 83, 6.5 B. 84, 8.5 C. 83, 9.5 D. 84, 7.5
4. 已知 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-3, 4)$ ，则向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量为
A. $\left(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ B. $\left(\frac{6}{25}, -\frac{8}{25}\right)$ C. $\left(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$ D. $\left(-\frac{6}{25}, \frac{8}{25}\right)$
5. 在 $\triangle ABC$ 中， $\cos A = \frac{3}{5}$, $\tan B = 2$ ，则 $\tan(A+B) =$
A. 2 B. $\frac{5}{3}$ C. -2 D. $-\frac{5}{3}$
6. 已知圆锥的表面积为 27π ，且它的侧面展开图是一个半圆，则圆锥底面直径为
A. 6 B. 3 C. 12 D. $3\sqrt{3}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且若 $a^2 + c^2 + ac = b^2$, 外接圆的半径为 1, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

8. 甲、乙两班参加了同一学科的考试, 其中甲班 50 人, 乙班 40 人, 甲班的平均成绩为 76 分, 方差为 96, 乙班的平均成绩为 85 分, 方差为 60, 那么甲、乙两班全部 90 名学生的平均成绩, 方差分别是

- A. 80.5, 78 B. 80.5, 100 C. 80, 100 D. 80, 90

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分。

9. 要得到函数 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 只需将函数 $y = \cos x$ 图象上所有点的坐标

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再将横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变)
B. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再将横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变)
C. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 再向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度
D. 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

10. 下列说法正确的是

- A. $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 的中点, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AD^2 - BD^2$
B. 向量 $\vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (2, 4)$ 可以作为平面向量的一组基底
C. 若非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 满足 $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, 则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形
D. 已知点 $A(1, 5), B(4, -7)$, 点 P 是线段 AB 的三等分点, 则点 P 的坐标可以为 $(2, -1)$

11. 某短视频平台以讲故事，赞家乡，聊美食，展才艺等形式展示了丰富多彩的新时代农村生活，吸引了众多粉丝，该平台通过直播带货把家乡的农产品推销到全国各地，从而推进了“新时代乡村振兴”。从平台的所有主播中，随机选取 300 人进行调查，其中青年人，中年人，其他人群三个年龄段的比例饼状图如图 1 所示，各年龄段主播的性别百分比等高堆积条形图如图 2 所示，则下列说法正确的有

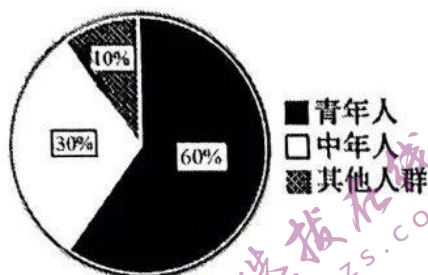


图1

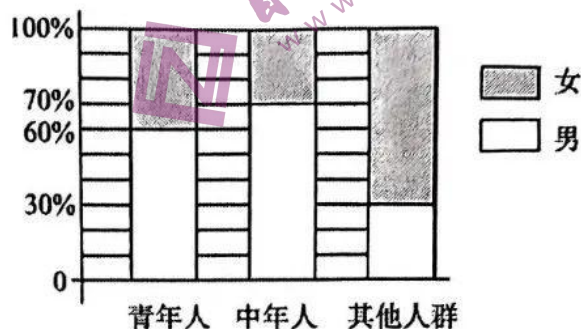


图2

- A. 样本中中年男性 20 人
B. 该平台女性主播约占 40%
C. 若用分层抽样法从样本中抽取 20 名主播担当平台监管，则中年主播应抽取 6 名
D. 从平台的所有主播中随机抽取 2 位，则 2 位主播均为女性的概率约为 $\frac{4}{25}$
12. 已知正四面体 $A-BCD$ 的棱长为 a ， N 为 $\triangle ABD$ 的重心， P 为线段 CN 上一点，则
- A. 正四面体的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$
B. 正四面体的外接球的体积为 $\frac{\sqrt{6}}{8}a^3\pi$
C. 若 $CP=3PN$ ，则 $DP \perp$ 平面 ABC
D. P 点到各个面的距离之和为定值，且定值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}a$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 当复数 $Z = (m^2 - 2m - 15) + (m^2 + 3m)i$ 是纯虚数时，实数 $m =$ _____.
14. 抛掷两颗质地均匀的骰子，记下骰子朝上面的点数，则事件“两个点数之积为偶数”的概率为_____.
15. 已知 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{5}$ ，则 $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) =$ _____.
16. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=AD=2$ ，点 M 为 AA_1 的中点，且 $MB \perp MC_1$ ，则平面 MBC_1 被长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截得的平面图形的周长为_____.

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

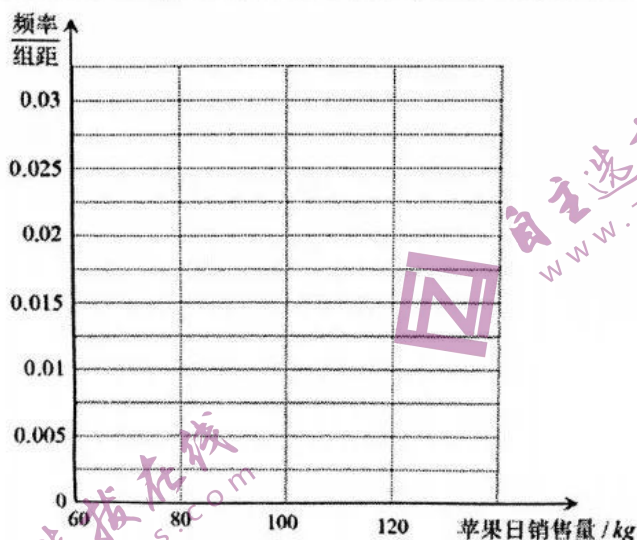
17. (10 分)

一家水果店的店长为了解本店苹果的日销售情况，记录了过去 20 天苹果的日销售量（单位：kg），结果如下：

83, 107, 91, 94, 80, 80, 100, 75, 102, 89,
74, 94, 84, 101, 93, 85, 97, 84, 85, 104.

- (1) 请计算该水果店过去 20 天苹果日销售量的中位数和极差；
- (2) 请完成苹果日销售量的频率分布表，并画出频率分布直方图。

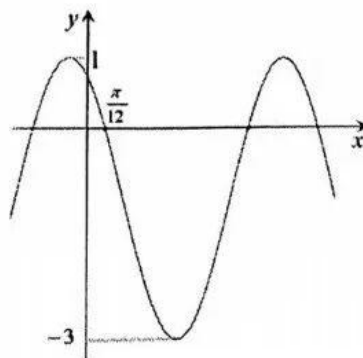
分组	频数	频率
[60,80)		
[80,100)		
[100,120]		
合计		



18. (12 分)

已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + k$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 图象相邻的两条对称轴的距离为 $\frac{\pi}{2}$ ，在一个周期内的图象如图所示。

- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；
- (2) 求函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上的单调递增区间。

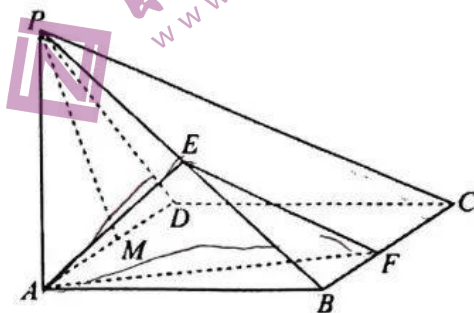


19. (12分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = AB = 4$, E 为 PB 中点, M 为 AD 中点, F 为线段 BC 上动点.

(1) 若 F 为 BC 中点, 求证: $PM \parallel$ 平面 AEF ;

(2) 证明: 平面 $AEF \perp$ 平面 PBC .



20. (12分)

近年来, 我国居民体重“超标”成规模增长趋势, 其对人群的心血管安全构成威胁, 国

际上常用身体质量指数 $BMI = \frac{\text{体重(kg)}}{\text{身高}^2(\text{m}^2)}$ 衡量人体胖瘦程度是否健康, 中国成人的 BMI

数值标准是: $BMI < 18.5$ 为偏瘦; $18.5 \leq BMI < 23.9$ 为正常; $24 \leq BMI < 27.9$ 为偏胖;

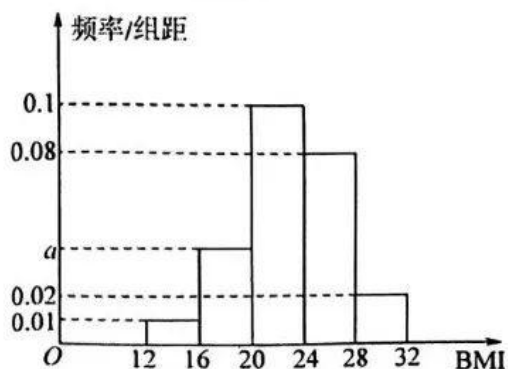
$BMI \geq 28$ 为肥胖. 下面是社区医院为了解居民体重现状, 随机抽取了 100 名居民体检数

据, 将其 BMI 值分成以下五组: $[12, 16)$, $[16, 20)$, $[20, 24)$, $[24, 28)$, $[28, 32]$, 得到

相应的频率分布直方图.

(1) 根据频率分布直方图, 求 a 的值, 并估计该社区居民身体质量指数 BMI 的样本数据的 80% 分位数;

(2) 现从样本中利用分层抽样的方法从 $[16, 20)$, $[24, 28)$ 的两组中抽取 6 名居民, 再从这 6 人中随机抽取 2 人, 求抽取到 2 人的 BMI 值不在同一组的概率.

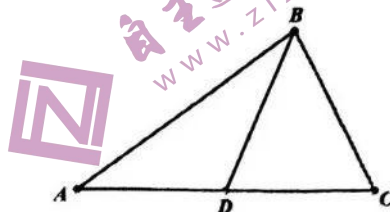


21. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 所对的边, $B = \frac{\pi}{3}$, $b = 6$, $\sin C = 3\sin A$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 若 D 为 AC 的中点, 求 BD 的长.

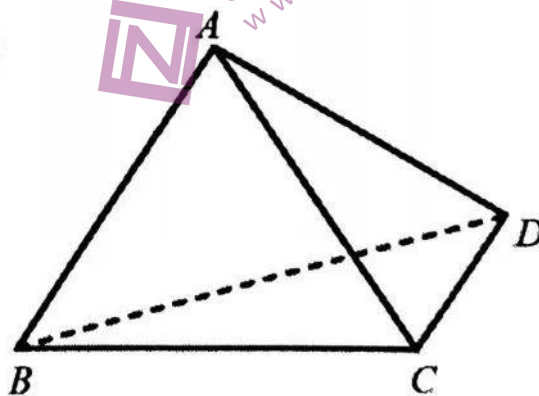
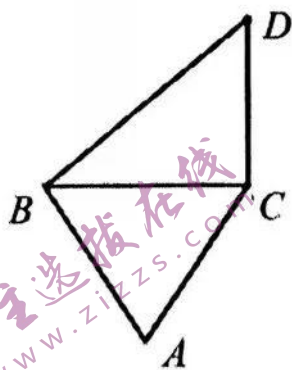


22. (12 分)

如图, $ABDC$ 是平面四边形, $\triangle ABC$ 为正三角形, $BC = CD = 4$, $BC \perp CD$. 将 $\triangle ABC$ 沿 BC 翻折, 过点 A 作平面 BCD 的垂线, 垂足为 H .

(1) 若点 H 在线段 BD 上, 求 AD 的长;

(2) 若点 H 在 $\triangle BCD$ 内部, 且直线 AB 与平面 ACD 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$, 求二面角 $A-BC-D$ 的余弦值.



江门市 2023 年普通高中高一调研测试（二）

数学答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	D	B	C	A	A	C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

题号	9	10	11	12
答案	AD	AC	BCD	BC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

题号	13	14	15	16
答案	5	$\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{25}$	$4\sqrt{5}+2\sqrt{2}$

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：（1）将样本数据由小到大排序，结果如下：

74, 75, 80, 80, 83, 84, 84, 85, 85, 89, 91, 93, 94, 94, 97, 100, 101, 102, 104, 107.

由样本容量为 20 可知，数据由小到大排序的中间项应为第 10 个、第 11 个数据，分别为 89, 91，故水果店过去 30 天苹果日销售量的中位数为 $\frac{89+91}{2} = 90$ 2 分

由上可知，样本数据的最小值为 74，最大值为 107，故极差为 $107-74=33$ 4 分

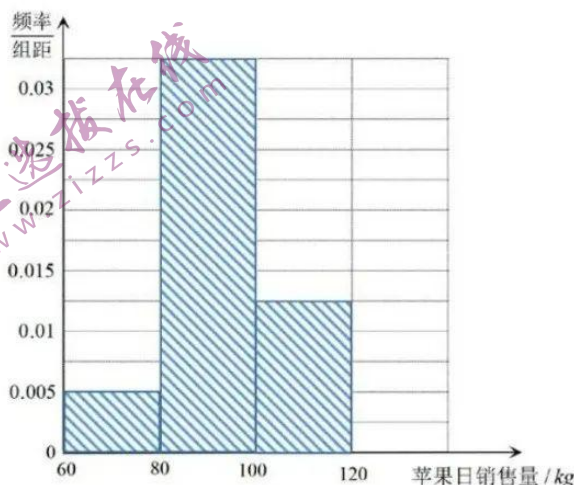
（2）由（1）中对数据排序可得频率分布表如下：

分组	频数	频率
[60,80)	2	0.1
[80,100)	13	0.65
[100,120]	5	0.25
合计	20	1

.....7分(频数与合计不得分, 每组频率正确得1分)

由分组可知组距为 20, 将各组的频率除以组距可得数据如下:

分组	$[60,80)$	$[80,100)$	$[100,120]$
$\frac{\text{频率}}{\text{组距}}$	$\frac{0.1}{20} = 0.005$	$\frac{0.65}{20} = 0.0325$	$\frac{0.25}{20} = 0.0125$



.....10分(每个组的直方图正确得1分, 计算频率除以组距的结果不得分)

18. 解: (1) 由已知得, $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}, T = \pi$, 故 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ 1分

由图可知, $A = \frac{1 - (-3)}{2} = 2$,2分

$2 + k = 1, k = -1$ 3分

故 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi) - 1$.

由图象过点 $(\frac{\pi}{12}, 0)$, 可得 $2\sin(2 \times \frac{\pi}{12} + \varphi) - 1 = 0, \sin(\frac{\pi}{6} + \varphi) = \frac{1}{2}$,

$\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi (k_1 \in \mathbb{Z})$, 或 $\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi (k_2 \in \mathbb{Z})$,

即 $\varphi = 2k_1\pi (k_1 \in \mathbb{Z})$, 或 $\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k_2\pi (k_2 \in \mathbb{Z})$,

经检验, 当 $k_2 = 0$ 时, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, 符合题意,5分

故 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{2\pi}{3}) - 1$ 6分

(2) 由 $2x + \frac{2\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$, 可得

$f(x)$ 的单调递增区间为 $x \in \left[-\frac{7\pi}{12} + k\pi, -\frac{\pi}{12} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$,8 分

令 $k=1$, 得 $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right] \cap \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{12}\right]$,

令 $k=2$, 得 $\left[\frac{17\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}\right] \cap \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] = \left[\frac{17\pi}{12}, \frac{3\pi}{2}\right]$,

故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上的单调递增区间为 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{12}\right]$ 和 $\left[\frac{17\pi}{12}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 12 分

19.(1) 证明: 如图, 连接 BM 交 AF 于点 O ,

连接 OE ,1 分

$\because$ 底面 $ABCD$ 为正方形, F 为 BC 中点, M 为 AD 中点,

$\therefore AM \parallel BF$, 且 $AM = BF$,

$\therefore$ 四边形 $ABFM$ 为平行四边形,2 分

$\therefore O$ 为 BM 中点.

又 $\because E$ 为 PB 中点,

$\therefore OE \parallel PM$, 且 $OE = \frac{1}{2}PM$ 3 分

而 $OE \subset$ 平面 AEF , $PM \not\subset$ 平面 AEF ,

$\therefore PM \parallel$ 平面 AEF5 分

(2) $PA = AB = 4$, 且 E 为 PB 中点, 则 $AE \perp PB$ 6 分

$\because$ 底面 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore AB \perp BC$ 7 分

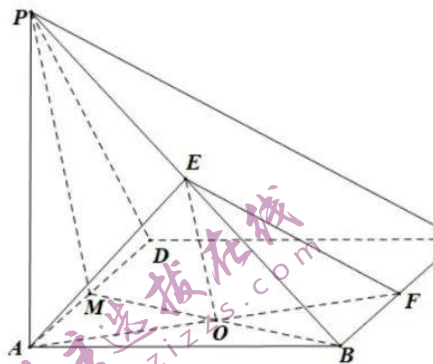
$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore PA \perp BC$ 8 分

又 $\because PA \cap AB = A$,

$\therefore BC \perp$ 平面 PAB 9 分

$\therefore AE \subset$ 平面 PAB



$\therefore BC \perp AE$,10 分

又 $\because BC \cap PB = B$,

$\therefore AE \perp$ 平面 PBC ,11 分

$\therefore AE \subset$ 平面 AEF ,

$\therefore$ 平面 $AEF \perp$ 平面 PBC12 分

20.解: (1) 根据频率分布直方图可知组距为4, 所有矩形面积和为1,

所以 $(0.01 + a + 0.1 + 0.08 + 0.02) \times 4 = 1$, 解得 $a = 0.04$;2 分

因为 $[12, 16)$, $[16, 20)$, $[20, 24)$ 三组频率之和为 $(0.01 + 0.04 + 0.1) \times 4 = 0.6 < 0.8$,

而 $[12, 16)$, $[16, 20)$, $[20, 24)$, $[24, 28)$, 四组的频率之和为 $0.6 + 0.08 \times 4 = 0.92 > 0.8$,

故样本数据的 80% 分位数在 $[24, 28)$ 内, 设为 x ,3 分

则 $0.6 + (x - 24) \times 0.08 = 0.8$, 解得 $x = 26.5$,

即该社区居民身体质量指数的样本数据 80% 分位数为 26.5.5 分

(2) 由频率分布直方图可知 $[16, 20)$ 的频数为 $100 \times 0.04 \times 4 = 16$, $[24, 28)$ 的频数为 $100 \times 0.08 \times 4 = 32$,

所以两组人数比值为 1:2,

按照分层抽样抽取 6 人, 则在 $[16, 20)$, $[24, 28)$ 分别抽取 2 人和 4 人,8 分

记 $[16, 20)$ 这组两个样本编号为 $\{a_1, a_2\}$, $[24, 28)$ 这组编号为 $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$,

故从 6 人随机抽取 2 人所有可能样本的构成样本空间:

$\Omega = \{(a_1, a_2), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (b_1, b_2), (b_1, b_3), (b_1, b_4), (b_2, b_3), (b_2, b_4), (b_3, b_4)\}$ 10 分

设事件 $A =$ “从 6 个人中随机抽取 2 人, 抽取到 2 人的 BMI 值不在同一组”,

则 $A = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_2, b_4)\}$,11 分

故 $P(A) = \frac{8}{15}$, 即从这 6 个人中随机抽取 2 人, 抽取到 2 人的 BMI 值不在同一组的概率为 $\frac{8}{15}$.

.....12 分

21.解: (1) $\triangle ABC$ 中, $\sin C = 3 \sin A$, 得 $c = 3a$ 2 分

由余弦定理得: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$

即 $a^2 + 9a^2 - 2a \cdot 3a \times \frac{1}{2} = 36$,3 分

解得: $a^2 = \frac{36}{7}, a = \frac{6\sqrt{7}}{7}, c = 3a = \frac{18\sqrt{7}}{7}$,5分

所以 $\triangle ABC$ 的面积

$$S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times \frac{6\sqrt{7}}{7} \times \frac{18\sqrt{7}}{7} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{27\sqrt{3}}{7}$$
6分

(2) 方法一

因为 D 为 AC 的中点,

所以 $AD = CD = 3$.

由 (1) 知 $a = \frac{6\sqrt{7}}{7}, c = \frac{18\sqrt{7}}{7}$.

由于 $\angle ADB + \angle CDB = \pi$,

所以 $\cos \angle ADB + \cos \angle CDB = 0$8分

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 中,

由余弦定理得: $\frac{BD^2 + AD^2 - c^2}{2 \cdot BD \cdot AD} + \frac{BD^2 + CD^2 - a^2}{2 \cdot BD \cdot AD} = 0$,

即 $\frac{BD^2 + 3^2 - \left(\frac{18\sqrt{7}}{7}\right)^2}{2 \cdot BD \cdot 3} + \frac{BD^2 + 3^2 - \left(\frac{6\sqrt{7}}{7}\right)^2}{2 \cdot BD \cdot 3} = 0$,10分

解得 $BD = \frac{3\sqrt{91}}{7}$12分

方法二

由于 D 为 AC 的中点,

所以 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ 8分

$$\overrightarrow{BD}^2 = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}ac \cos \frac{\pi}{3} = \frac{117}{7}$$
11分

$BD = \frac{3\sqrt{91}}{7}$ 12分

22.解: 方法一: (1) $\because AH \perp$ 平面 BCD

$\therefore AH \perp BD, AH \perp CH$ 1分



∴ 在 $Rt\triangle ABH$ 中, $AH^2 + BH^2 = AB^2$

在 $Rt\triangle ACH$ 中, $AH^2 + CH^2 = AC^2$,

∵ $AB = AC$

∴ $BH = CH$ 2 分

由于 $\triangle BCD$ 为等腰直角三角形,

∴ $BH = CH = DH$

H 为 BC 中点,3 分

在 $Rt\triangle ACH$ 中由勾股定理得, $AH^2 = AC^2 - CH^2 = 16 - 8 = 8$,

∴ $AH = 2\sqrt{2}$ 4 分

在 $Rt\triangle ADH$ 中由勾股定理得, $AD^2 = AH^2 + DH^2 = 8 + 8 = 16$,

∴ $AD = 4$ 5 分

(2) 当点 H 在 $\triangle BCD$ 内部, 知 $AH \perp$ 平面 BCD ,

设 O 是 BC 的中点, 连接 OH , 则 $AH \perp BC$,

∵ $\triangle ABC$ 为正三角形,

∴ $AO \perp BC$,

∵ $AO \cap AH = A$

∴ $BC \perp$ 平面 AOH ,

∴ $BC \perp OH$,

∴ $\angle AOH$ 为二面角 $A-BC-D$ 的平面角7 分

设 B 点到平面 ACD 的距离为 h_B , 则 $h_B = AB \cdot \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{12\sqrt{13}}{13}$ 8 分

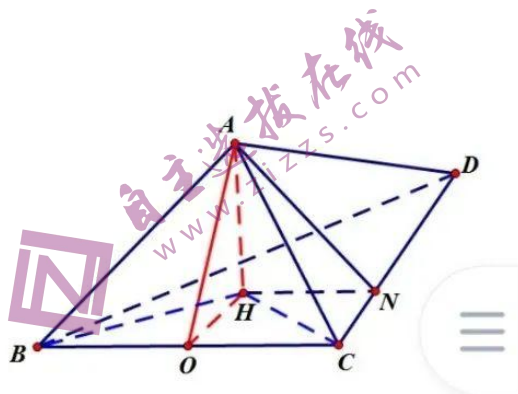
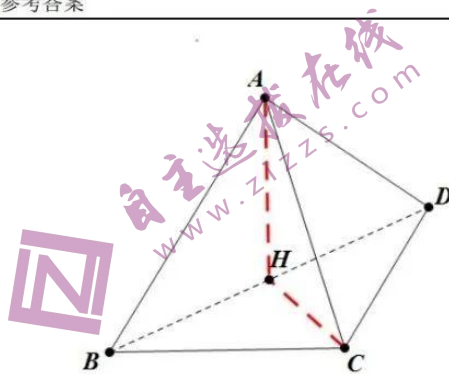
过 H 点作 $HN \parallel BC$, 连结 AN ,

由 $AH \perp$ 平面 BCD , $AB = AC$

∴ $HB = HC \Rightarrow H$ 在 BC 的中垂线上,9 分

设 $AH = h$, 则 $AN = \sqrt{h^2 + 4}$,

由等体积法得: $V_{A-BCD} = V_{B-ACD}$ 10 分



$$\therefore \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot AH = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} \cdot h_B$$

$$\text{即 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot AH = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} CD \cdot AN \cdot h_B$$

$$\therefore BC \cdot AH = AN \cdot h_B, \text{ 解得 } h = 3 \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \cos \angle AOH = \frac{OH}{AO} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

方法二：在平面四边形 $ABDC$ 中，设 BC 的中点为 O ，

连接 AO 并延长，交 BD 于 M 。

$\because \triangle ABC$ 为正三角形， O 为 BC 的中点，

$\therefore AO \perp BC$ ，

$\because BC \perp CD$ ，

$\therefore AM \parallel CD$ ，

$\because O$ 为 BC 的中点，

$\therefore M$ 为 BD 的中点。……1 分

在三棱锥 $A-BCD$ 中，

$BC \perp AO$ ， $BC \perp OM$ ，且 $OA \cap OM = O$ ，

$\therefore BC \perp$ 平面 AOM ，

$\because BC \subset$ 平面 BCD ，

$\therefore$ 平面 $AOM \perp$ 平面 BCD ，

$\therefore$ 点 H 在直线 OM 上。……3 分（备注：3 分中，1 分给第 1 问、2 分给第 2 问）

(1) 当点 H 在线段 BD 上，

此时 H 与 M 重合，

$$\therefore OH \parallel CD, CD = 4, OH = 2, AO = 2\sqrt{3}, BD = 4\sqrt{2}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

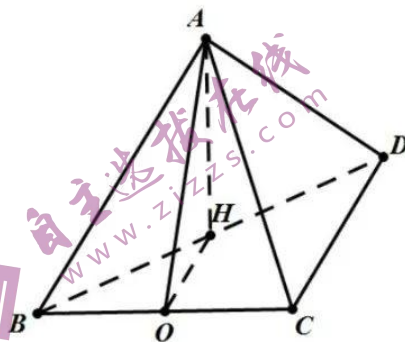
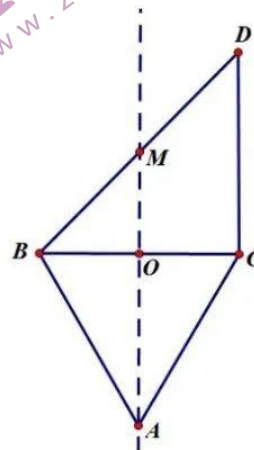
$\because AH \perp$ 平面 $BCD, OH \subset$ 平面 $BCD, HD \subset$ 平面 BCD

$$\therefore AH \perp OH, AH \perp DH \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{在 } Rt\triangle AOH, AH = \sqrt{AO^2 - OH^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{在 } Rt\triangle ADH, AD = \sqrt{AH^2 + DH^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4 \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(2) 当点 H 在 $\triangle BCD$ 内部，知 $AH \perp$ 平面 BCD ，



此时 H 在线段 OM (不含端点) 上.

$\therefore AO \perp BC, OM \perp BC,$

$\therefore \angle AOH$ 为二面角 $A-BC-D$ 的平面角,8 分

由于 $CD \subset$ 平面 BCD , $AH \perp CD$

过点 H 作 $HN \parallel BC$ 交 CD 于 N ,

连接 AN, HD, AE ,

$\therefore CD \perp BC,$

$\therefore HN \perp CD$

又因为 $AH \cap HN = H$

$\therefore CD \perp$ 平面 AHN .

$\therefore CD \subset$ 平面 ACD

$\therefore$ 平面 $ACD \perp$ 平面 AHN

过点 H 作 $HQ \perp AN$ 交 AN 于点 Q ,

又平面 $ACD \cap$ 平面 $AHN = AN$

$\therefore HQ \perp$ 平面 ACD9 分

设 α 为直线 AB 与平面 ACD 所成的角,

则点 B 到平面 ACD 的距离为 $2HQ$,

$$\sin \alpha = \frac{2HQ}{AB} = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \text{ 解得 } HQ = \frac{6\sqrt{13}}{13}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

在 $Rt\triangle AHN$ 中, 可设 $AH = x, AN = \sqrt{4+x^2}$

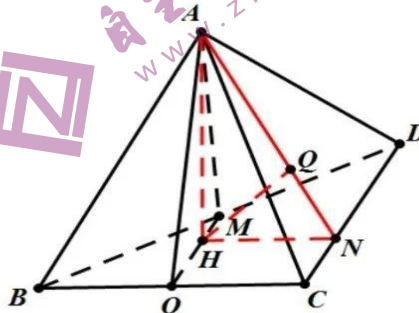
$$\text{由于 } AN \cdot HQ = AH \cdot HN \Rightarrow \sqrt{x^2+4} \cdot \frac{6\sqrt{13}}{13} = 2x,$$

解得 $x = 3$11 分

在 $Rt\triangle AOH$ 中,

$$OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{3}.$$

$$\text{所以 } \cos \angle AOH = \frac{OH}{AO} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线