# 2017年全国高中数学联合竞赛广东赛区选拔赛试卷
# 参考答案及评分标准

**说明：**

1. **评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设8分和0分两档；其他各题的评阅，请严格按照评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次．**
2. **如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第9小题4分为一个档次，第10、11小题5分为一个档次，不要增加其他中间档次．**

**一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，共64分．**

1. 已知数列 $a_0$，$a_1$，$a_2$，⋯，$a_n$，⋯满足关系式$(2-a_{n+1})(4+a_n)=8$，且 $a_0=2$，则 $\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}$ 的值是______．

【答案】$\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}=\frac{1}{2}(2^{n+2}-n-3)$．

【解析】$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{a_n}+\frac{1}{2}$，令 $b_n=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}$，则 $b_n=2b_{n-1},b_0=1,b_n=2^n$，

$\frac{1}{a_n}=2^n-\frac{1}{2}$，　　$\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}=\frac{1}{2}(2^{n+2}-n-3)$．

2. 圆锥曲线 $\sqrt{x^2+y^2+6x-2y+10}-|x-y+3|=0$ 的离心率是______．

【答案】$\sqrt{2}$．

【解析】原式变形为 $\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}=|x-y+3|$，即 $\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{2}\frac{|x-y+3|}{\sqrt{2}}$．所以动点 $(x,y)$ 到定点 $(-3,1)$ 的距离与它到直线 $x-y+3=0$ 的距离之比为 $\sqrt{2}$．故此动点轨迹为双曲线，离心率为 $\sqrt{2}$．

3. 设 $f(x)$ 是定义在 $R$ 上的奇函数，$f(1)=2$，当 $x>0$ 时，$f(x)$ 是增函数，且对任意的 $x$、$y\in R$，都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，则函数 $f(x)$ 在[-3,-2]上的最大值是_____．

【答案】$-4$．

【解析】

因为 $f(x)$ 是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上也是增函数，则 $f(-3)\leqslant f(x)\leqslant f(-2)$.

又 $f(2)=f(1)+f(1)=4$，所以 $f(-2)=-f(2)=-4$.

故函数 $f(x)$ 在 $[-3,-2]$ 上的最大值为 $-4$.

4. 设 $m,n$ 均为正整数，则 $\sum_{k=0}^{m-1}\cos\frac{2k\pi}{m}+\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}=$_____.

【答案】1 或 0.

【解析】因为 $\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m},\ k=0,1,\cdots,m-1,\ \cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k=0,1,\cdots,n-1$ 分别是多项式 $x^m-1$ 与 $x^n-1$ 的根，因此当 $m>1,n>1$ 时由根与系数的关系可得：

$\sum_{k=0}^{m-1}\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sum_{k=0}^{m-1}\sin\frac{2k\pi}{m}=0,\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$

所以 $\sum_{k=0}^{m-1}\cos\frac{2k\pi}{m}=0,\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$，故：$\sum_{k=0}^{m-1}\cos\frac{2k\pi}{m}+\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$.

而当 $m=1$ 时 $\sum_{k=0}^{m-1}\cos\frac{2k\pi}{m}+\sum_{k=0}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}=1$.

5. 已知点 $P$ 在圆 $C:x^2+(y+2)^2=\frac{1}{4}$ 上运动，点 $Q$ 在曲线 $y=ax^2(a>0,-1\le x\le 2)$ 上运动，且 $|PQ|$ 的最大值为 $\frac{9}{2}$，则 $a=$_____.

【答案】$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

【解析】连接 $QC$ 并延长交圆于点 $D$，则 $|PQ|\le|QC|+|CP|=|QC|+|CD|=|QD|$，所以 $|PQ|$ 的最大值等于 $|CP|$ 的最大值与圆的半径之和，由于

$f(x)=|CP|^2=x^2+(ax^2+2)^2=a^2x^4+(4a+1)x^2+4,-1\le x\le 2$，

$f(-1)=5+4a+a^2<16a^2+16a+8==f(-2)$，因此 $x=-2$ 时，$|CP|$ 取得最大值，于是：$\sqrt{16a^2+16a+8}=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4,2a^2+2a-1=0,a=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

6. 已知 $\alpha,\beta,\gamma$ 是一个三角形的三个内角，如果 $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$ 取得最大值，则 $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=$__________.

【答案】$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

【解析】若 $\alpha,\beta,\gamma$ 中至少有两个不等，不妨设 $\alpha\neq\beta$，则

$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos(\alpha+\beta)<$

$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1=-\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)^2+\frac{3}{2}\le\frac{3}{2}$.

因此当且仅当 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$ 时，$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$ 取得最大值，故：$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

7. 从各位数字两两不等且和为 10 的所有四位数中任取两个数，则 2017 被取到的可能

性为______.

【答案】$\frac{1}{48}$.

【解析】方程$x_1+x_2+x_3+x_4=10, 0\le x_1<x_2<x_3<x_4\le 9$的整数解有且仅有

$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,1,2,7),(0,1,3,6),(0,1,4,5),(0,2,3,5),(1,2,3,4)$，因此符合条件的四位数恰有：

$4\times C_3^1\times 3!+4!=96$（个），故所求概率为$\frac{C_{95}^1}{C_{96}^2}=\frac{1}{48}$.

8. 已知$S$是正整数集合的无穷子集，满足对任何$a,b,c\in S, abc\in S$，将$S$中的元素按照由小到大的顺序排列成的数列记为$\{a_n\}$，且已知$a_1=2, a_{2031}=2^{4061}$，则$a_{2017}=$______.

【答案】$2^{4033}$.

【解析】由题意对任何$a,b,c\in S, abc\in S$可知：

$$2\times 4^{n-1}=2^{2n-1}, 1\le n\le 2031$$

都是序列$\{a_n\}$中的项，所以$a_{2017}=2\times 4^{2016}=2^{4033}$.

**二、解答题：本大题共 3 小题，共 56 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

9.（本小题满分 16 分）设直线$l: y=x+b$与椭圆 C: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$不相交。过直线$l$上的点$P$作椭圆 C 的切线$PM$、$PN$，切点分别为$M$、$N$，联结$MN$.

（1）当点$P$在直线$l$上运动时，证明：直线$MN$恒过定点$Q$；

（2）当$MN \parallel l$时，定点$Q$平分线段$MN$.

**证明：**（1）设$P(x_0,y_0)$、$M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$. 则椭圆过点$M$、$N$的切线方程分别为

$$\frac{x_1x}{25}+\frac{y_1y}{9}=1，\quad \frac{x_2x}{25}+\frac{y_2y}{9}=1.$$

因为两切线都过点$P$，则有

$$\frac{x_1x_0}{25}+\frac{y_1y_0}{9}=1，\quad \frac{x_2x_0}{25}+\frac{y_2y_0}{9}=1.$$

这表明$M$ 、$N$ 均在直线$\frac{x_0x}{25}+\frac{y_0y}{9}=1$ ①上. 由两点决定一条直线知，式①就是直线$MN$的方程，其中$\left(x_0,y_0\right)$满足直线$l$的方程. --------------------------------------- 4 分

当点$P$在直线$l$上运动时，可理解为$x_0$取遍一切实数，相应的$y_0$为

$$y_0=x_0+b$$

代入①消去$y_0$得$\frac{x_0x}{25}+\frac{x_0+b}{9}y-1=0$ ②

对一切$x_0\in R$恒成立. 变形可得

$x_0(\frac{x}{25}+\frac{y}{9})+(\frac{b}{9}y-1)=0$，对一切$x_0\in R$恒成立. 故有$\begin{cases}\frac{x}{25}+\frac{y}{9}=0\\ \frac{b}{9}y-1=0\end{cases}$

由此解得直线$MN$恒过定点$Q(-\frac{25}{b},\frac{9}{b})$. --------------------------------------- 8 分

（2）当$MN\parallel l$时，由式②知$-\frac{x_0}{25}=\frac{x_0+b}{9}\neq b$ 解得$x_0=-\frac{25}{34}b$

代入②，得此时$MN$的方程为$y=x+\frac{34}{b}$ ③

将此方程与椭圆方程联立，消去$y$得

$\frac{34}{25}x^2+\frac{68}{b}x+\frac{34^2}{b^2}-1=0$ -------------------------------------- 12 分

由此可得，此时$MN$截椭圆所得弦的中点横坐标恰好为点$Q(-\frac{25}{b},\frac{9}{b})$的横坐标，即

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=-\frac{1}{2}\frac{\frac{68}{b}}{\frac{34}{25}}=-\frac{25}{b}$$

代入③式可得弦中点纵坐标恰好为点$Q(-\frac{25}{b},\frac{9}{b})$的纵坐标，即

$$y=-\frac{25}{b}+\frac{34}{b}=\frac{9}{b}$$

这就是说，点$Q(-\frac{25}{b},\frac{9}{b})$平分线段$MN$.　　　　--------------------------------------- 16 分

10.（本小题满分 20 分）已知函数 $f(x)=\frac{16x+7}{4x+4}$，数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$满足$a_1>0$，$b_1>0$，$a_n=f(a_{n-1})$，$b_n=f(b_{n-1})$，$n=2,3\cdots$.

（1）讨论数列$\{a_n\}$的单调性；

（2）求证：$|b_n-a_n|\le\frac{1}{8^{n-3}}|b_1-a_1|,n=1,2,3\cdots$.

**解**：(1) $f(x)=\frac{16(x+1)-9}{4(x+1)}=4-\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{x+1}$，则

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}-a_n&=\left(4-\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{a_n+1}\right)-\left(4-\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{a_{n-1}+1}\right)\\
&=\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{(a_n+1)(a_{n-1}+1)}(a_n-a_{n-1})\\
&=\left(\frac{9}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{(a_n+1)(a_{n-1}+1)^2(a_{n-2}+1)}(a_{n-1}-a_{n-2})\\
&=\cdots=\left(\frac{9}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{(a_n+1)(a_{n-1}+1)^2\cdots(a_2+1)^2(a_1+1)}(a_2-a_1)
\end{aligned}
$$

…… 5 分

所以 $a_{n+1}>a_n\Leftrightarrow a_2>a_1,i.e.,\frac{16a_1+7}{4a_1+4}>a_1$。解得

$$0<a_1<\frac{7}{2}。$$

所以当$0<a_1<\frac{7}{2}$时，数列$\{a_n\}$单调上升；所以当$a_1=\frac{7}{2}$时，数列$a_n=\frac{7}{2},n=1,2,3,\cdots$；

所以当$a_1>\frac{7}{2}$时，数列$\{a_n\}$单调下降。　　　　-------------------------------------- 10 分

**证明**：（2）因为 $f(x)$ 单调上升，计算得 $f(0)=\frac{7}{4},f(\frac{7}{4})=\frac{35}{11},f(\frac{35}{11})=\frac{637}{184}$

由（1）知

$$a_n-b_n=\frac{9}{4}\frac{1}{(a_{n-1}+1)(b_{n-1}+1)}(a_{n-1}-b_{n-1})$$

所以：(i)，当$0<a_1<\frac{7}{2},0<b_1<\frac{7}{2}$时，$a_4=f^3(a_1)>f^3(0)=\frac{637}{184}$，故当$n\ge4$时，

$\frac{637}{184}=a_4<a_n<\frac{7}{2}$， 同理， $\frac{637}{184}=b_4<b_n<\frac{7}{2}$。故

$$|a_n-b_n|=\frac{9}{4}\frac{1}{(\frac{637}{184}+1)(\frac{637}{184}+1)}|a_{n-1}-b_{n-1}|<\frac{1}{8}|a_{n-1}-b_{n-1}|$$

$$<\cdots<\frac{1}{8^{n-4}}|a_4-b_4|<\frac{1}{8^{n-4}}\frac{9}{4}\frac{1}{(\frac{35}{11}+1)(\frac{35}{11}+1)}|a_3-b_3|$$

---------------------------------------- 15 分

$$<\frac{1}{8^{n-4}}\frac{9}{4^3}\frac{9}{4}\frac{1}{(\frac{7}{4}+1)(\frac{7}{4}+1)}|a_2-b_2|<\frac{1}{8^{n-3}}|a_1-b_1|$$

（ii），当 $0<a_1<\frac{7}{2},\frac{7}{2}<b_1$ 时，由（1）得：

$$\frac{7}{2}<b_{n+1}<b_n。$$

所以

$$|a_n-b_n|=\frac{9}{4}\frac{1}{(\frac{35}{11}+1)(\frac{7}{2}+1)}|a_{n-1}-b_{n-1}|<\frac{1}{8}|a_{n-1}-b_{n-1}|$$

$$<\cdots<\frac{1}{8^{n-3}}|a_3-b_3|<\frac{1}{8^{n-2}}|a_1-b_1|,\forall n\ge 2$$

（iii），最后，当 $a_1>\frac{7}{2},b_1>\frac{7}{2}$ 时， 我们有

$$\frac{7}{2}<a_{n+1}<a_n,\frac{7}{2}<b_{n+1}<b_n$$

所以

$$|a_n-b_n|=\frac{9}{4}\frac{1}{(\frac{7}{2}+1)(\frac{7}{2}+1)}|a_{n-1}-b_{n-1}|<\frac{1}{8}|a_{n-1}-b_{n-1}|$$

---------------------------------------- 20 分

$$<\cdots<\frac{1}{8^{n-1}}|a_1-b_1|$$

11.（本小题满分 20 分）（1）求使方程

$$x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n=2017 \qquad (*)$$

有正整数解 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的最大正整数 $n$.

（2）用 $A_n$ 表示方程（*）的所有正整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 构成的集合，当 $n$ 为奇数时，

我们称 $A_n$ 中的每一个元素为方程（*）的一个奇解；当 $n$ 为偶数时，我们称 $A_n$ 中的每一个元素为方程（*）的一个偶解. 证明：方程（*）中所有奇解的个数与偶解的个数相等.

**解**：（1）因为

$$2017 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n \geq 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

所以 $n \leq 63$. 当 $n = 63$ 时，$x_1 = 2, x_2 = x_3 = \cdots = x_{63} = 1$ 为方程（*）的一组正整数解，故所求最大值为 $n = 63$.

---------------------------------------- 5 分

**证明**：（2）$\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A_n, 1 \leq n \leq 63$，令 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 与之对应，其中

$$a_i = x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n, i = 1, 2, \cdots, n,$$

则 $a_1 > a_2 > \cdots > a_n \geq 1$，且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2017$. 令

$$B_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_1 > a_2 > \cdots > a_n \geq 1, a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2017\}.$$

那么 $x \mapsto a$ 是 $A_n$ 到 $B_n$ 的双射，所以：$|A_n| = |B_n|$（$|X|$ 表示集合 $X$ 中所含元素的个数）.

---------------------------------------- 10 分

$\forall a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in B_n$，我们用 $\sigma(a) = s$ 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中使得 $a_1 = a_s + s - 1$ 成立的最小下标，即：

$$a_i - a_{i+1} = 1, i = 1, 2, \cdots, s-1, a_s - a_{s+1} \geq 2.$$

因为 $a_1 = a_1 + 1 - 1$，所以满足条件的正整数 $s$ 存在且 $1 \leq s \leq n$，并记 $\tau(a) = a_n$.

若 $\tau(a) \leq \sigma(a)$，我们断言 $\tau(a) \leq n-1$，否则 $n-1 < \tau(a) = a_n \leq \sigma(a) \leq n$，因此 $a_n = \sigma(a) = n$，于是我们有：

$$2017 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n + (n+1) + \cdots + (2n-1) = \frac{n(3n-1)}{2},$$

此不可能. 所以 $b = (a_1 + 1, a_2 + 1, \cdots, a_{\tau(a)} + 1, a_{\tau(a)+1}, \cdots, a_{n-1}) \in B_{n-1}$ 是唯一确定的元素且 $\tau(b) = a_{n-1} > a_n = \sigma(b)$.

若 $\tau(a) > \sigma(a)$ 且 $\sigma(a) = n$ 时，我们断言 $a_n - 1 > \sigma(a)$. 否则

$$a_n - 1 \leq n = \sigma(a) < \tau(a) = a_n,$$

因此 $a_n = \tau(a) = n + 1$. 于是我们有：

$$2017=a_1+a_2+\cdots+a_n=(n+1)+(n+2)+\cdots+2n=\frac{n(3n+1)}{2},$$

此不可能. 所以 $c=(a_1-1,a_2-1,\cdots,a_{\sigma(a)}-1,a_{\sigma(a)+1},\cdots,a_n,\sigma(a))\in B_{n+1}$ 是唯一确定的元素且 $\tau(c)=\sigma(a)\le\sigma(c)$. ---------------------------------------- 15 分

由此我们证明了 $f:a\mapsto\begin{cases}b,\text{若}\tau(a)\le\sigma(a)\\c,\text{若}\tau(a)>\sigma(a)\end{cases}$, $\forall a\in B=\bigcup\limits_{n=1}^{63}B_n$ 是 $B=\bigcup\limits_{n=1}^{63}B_n$ 到自身的映射且 $f(\bigcup\limits_{n=1}^{32}B_{2n-1})\subset\bigcup\limits_{n=1}^{31}B_{2n}, f(\bigcup\limits_{n=1}^{31}B_{2n})\subset\bigcup\limits_{n=1}^{32}B_{2n-1}$，如果我们能够证明 $f$ 是满射，则 $f$ 也是单射，因而是双射，从而：

$$|\bigcup_{n=1}^{32}A_{2n-1}|=|\bigcup_{n=1}^{32}B_{2n-1}|=|\bigcup_{n=1}^{31}B_{2n}|=|\bigcup_{n=1}^{31}A_{2n}|,$$

即：方程（*）中所有奇解的个数与偶解的个数相等.

事实上，$\forall v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\in B=\bigcup\limits_{n=1}^{63}B_n$，如果 $\tau(v)\le\sigma(v)$，则存在

$$a=(v_1+1,v_2+1,\cdots,v_{\tau(v)}+1,v_{\tau(v)+1},\cdots,v_{n-1})\in B=\bigcup_{n=1}^{63}B_n，\text{使得：}f(a)=v.$$

如果 $\tau(v)>\sigma(v)$，则存在

$a=(v_1-1,v_2-1,\cdots,v_{\sigma(v)}-1,v_{\sigma(v)+1},\cdots,v_n,\sigma(v))\in B=\bigcup\limits_{n=1}^{63}B_n$，使得：$f(a)=v$. 故 $f$ 是满射，结论成立. ---------------------------------------- 20 分