天一大联考

2021—2022 学年高三年级上学期期末考试

理科数学·答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. 答案　D

命题意图　本题考查集合的表示、概念与运算.

解析　由 $A\cap B=B$，可知 a 的取值范围是$[3,+\infty)$.

2. 答案　C

命题意图　本题考查复数的模的概念、复数的运算.

解析　因为 $3+z=\frac{3+4i}{2+i}=2+i$，所以 $z=-1+i$，$|z|=\sqrt{2}$.

3. 答案　A

命题意图　本题考查等差数列的前 n 项和 S_n 与 a_n 的关系、等差数列的定义.

解析　依题意，$S_8=\frac{8(a_1+a_8)}{2}=\frac{8(a_4+a_5)}{2}=\frac{8\times 7}{2}=28$.

4. 答案　B

命题意图　本题考查系统抽样.

解析　将 1 000 名老人分成 100 个组，每组 10 名老人，97 号老人被抽到，所以第 1 组抽到 7 号，且第 1 组至第 100 组抽到的老人编号构成等差数列$\{a_n\}$，公差 $d=10$，所以 $a_n=10n-3$，令 $n=63$，得第 63 位的编号是 627.

5. 答案　B

命题意图　本题考查函数的图象与性质.

解析　因为 $f(-x)=(e^{-x}-e^{x})\sin(-x)+1=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，排除 A，D，又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}})+1>0$，排除 C.

6. 答案　A

命题意图　本题考查正态分布.

解析　由 $X\sim N(96,16)$，可知 $\sigma=4$，由 3σ 原则，可知 $P(100<X\leqslant 108)=P(96+4<X\leqslant 96+3\times 4)=\frac{1}{2}(0.9973-0.6827)=0.1573$.

7. 答案　A

命题意图　本题考查三角函数的图象与性质的综合应用.

解析　因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π，$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$为最小值，所以 $\omega=2$，由 $2\times\frac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，可得 $\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

8. 答案　A

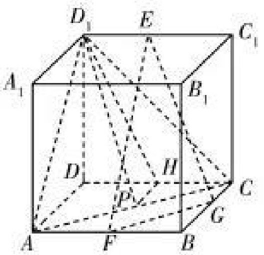
命题意图　本题主要考查函数模型的应用及指数、对数运算.

解析 由题可知 $2.85\times10^{40k-1}=2\,850$,解得 $k=0.1$,所以 $y=2.85\times10^{0.1x-1}$. 设现在的销售成本为 y_1,对应的产品数量为 x_1,原来的销售成本为 y_2,对应的产品数量为 x_2,由题意知 $y_1=\frac{1}{4}y_2$,所以 $10^{0.1(x_2-x_1)}=4$,故 $x_2-x_1=10\lg 4\approx6$.

9. **答案** C

命题意图 本题考查线面平行的性质.

解析 因为 P 是动点,PD_1 // 平面 EFG,所以 P 在过 D_1 与平面 EFG 平行的平面 α 内,又 P 在底面 $ABCD$ 内,所以 P 在平面 α 与平面 $ABCD$ 的交线上.连接 AC,AD_1,D_1C.如图,易知 FG // AC,EF // AD_1,所以平面 EFG // 平面 D_1AC,P 在线段 AC 上,当 $D_1P\perp AC$ 时,D_1P 最短,易得此时 $D_1P=\sqrt{6}$.



10. **答案** B

命题意图 本题考查向量的线性运算及数量积运算.

解析 因为 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}-(\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD})=(1-\lambda)\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD})=-\lambda\overrightarrow{AD}$,所以 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}=-\lambda(1-\lambda)\overrightarrow{AD}^2+\lambda\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-\lambda(1-\lambda)|\overrightarrow{AD}|^2+\lambda|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos120^\circ=-\lambda+\lambda^2+\lambda\times1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$,解得 $\lambda=2$ 或 $\lambda=0$(不符合题意,舍去),故 $\lambda=2$.

11. **答案** C

命题意图 本题考查双曲线的方程与性质.

解析 由双曲线的离心率为 $\sqrt{2}$,可知双曲线为等轴双曲线,故双曲线的方程为 $x^2-y^2=a^2(a>0)$,则其渐近线的方程为 $y=\pm x$. 设 $A(m,m)$,$B(n,-n)(m>0,n>0)$,易知 $\triangle AOB$ 为直角三角形,则 $\triangle AOB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|OA||OB|=mn=12$,又可知 P 为线段 AB 中点,即 $P\left(\frac{m+n}{2},\frac{m-n}{2}\right)$ 在双曲线上,所以 $a^2=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2=mn=12$,$a=2\sqrt{3}$,故双曲线的实轴长为 $4\sqrt{3}$.

12. **答案** D

命题意图 本题考查椭圆的几何性质,直线与椭圆的位置关系.

解析 由题可知 $A(-2,0)$,$B(2,0)$,$F_2(1,0)$,设直线 $AM:y=k(x+2)(k\neq0)$,则 $D(2,4k)$,设线段 BD 的中点为 E,则 $E(2,2k)$,联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x+2),\end{cases}$ 消去 y 整理得 $(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$. 设 $M(x_0,y_0)$,由根与系数的关系得 $-2x_0=\frac{16k^2-12}{3+4k^2}$,解得 $x_0=\frac{6-8k^2}{3+4k^2}$,故有 $y_0=k(x_0+2)=\frac{12k}{3+4k^2}$,又 $F_2(1,0)$,所以当 $k=\pm\frac{1}{2}$ 时,$M\left(1,\pm\frac{3}{2}\right)$,$D(2,\pm2)$,此时 $MF_2\perp x$ 轴,四边形 $BPQD$ 为矩形,$|BP|+|DQ|=2$,$|BD|=2$,所以 $|BP|+|DQ|=|BD|$. 当 $k\neq\pm\frac{1}{2}$ 时,$k_{PF_2}=\frac{y_0}{x_0-1}=\frac{4k}{1-4k^2}$,所以直线 $PF_2:y=\frac{4k}{1-4k^2}(x-1)$,所以点 E 到直线 PF_2 的

距离 $d=\dfrac{\left|\dfrac{8k}{1-4k^2}-2k-\dfrac{4k}{1-4k^2}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{4k}{1-4k^2}\right)^2+1}}=2|k|$，而 $BD=4|k|$，即 $d=\dfrac{1}{2}|BD|$，因为四边形 $BPQD$ 为直角梯形，所以

$|BP|+|DQ|=2d=4|k|=|BD|$. 所以使 $|BP|+|DQ|<|BD|$ 成立的点 H 不存在.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. **答案** 2

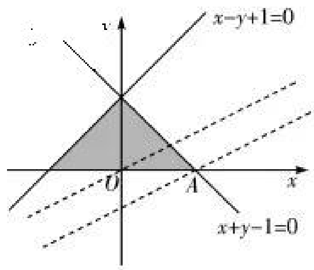
命题意图 本题考查等比数列的基本运算.

解析 因为 $S_4=S_2+18$，所以 $S_4-S_2=a_3+a_4=18$，即 $a_2q+a_2q^2=18$，所以 $q^2+q-6=0$，解得 $q=2$ 或 $q=-3$（舍去），故 $q=2$.

14. **答案** 1

命题意图 本题考查线性规划.

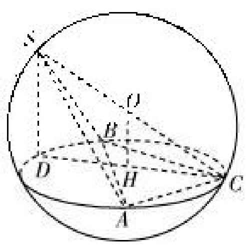
解析 $\begin{cases} y-1\leqslant x\leqslant 1-y, \\ y\geqslant 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x-y+1\geqslant 0, \\ x+y-1\leqslant 0, \\ 0\leqslant y, \end{cases}$ 作出可行域，如图中阴影区域所示，当直线 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{z}{2}$ 过点 $A(1,0)$ 时，z 取得最大值，且最大值为 1.



15. **答案** 20π

命题意图 本题考查球与多面体的综合应用，球的表面积的计算.

解析 如图，设 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 H，外接圆半径为 r，球的半径为 R，延长 CH 交圆 H 于 D，连接 SD，由球的性质，知 $OH\perp$ 平面 $ADBC$，$OH\perp CD$，又 $OH\underline{\parallel}\dfrac{1}{2}SD$，所以 $SD\perp CD$，$SD\perp$ 平面 $ADBC$，因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}AC\cdot BC\sin\angle ACB=\dfrac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 120^\circ=\sqrt{3}$，三棱锥 $S-ABC$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}SD=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $SD=2$，$OH=1$，在 $\triangle ABC$ 中，易知 $AB=2\sqrt{3}$，由正弦定理可得 $\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=2r$，解得 $r=2$，则 $R^2=1^2+2^2=5$，所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2=20\pi$.



16. **答案** $\{1\}$

命题意图 本题考查由不等式恒成立求参数的取值范围问题.

解析 不等式可化为 $a(x+\ln x)\leqslant xe^x-1$，令 $t=x+\ln x$，它在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，值域为 [illegible]

xe^x,不等式 $a(x+\ln x)\leqslant xe^x-1$ 可化为 $at\leqslant e^t-1$,即当 $t\in\mathbf{R}$ 时,$at\leqslant e^t-1$ 恒成立,在同一坐标系中画出函数 $f(t)=e^t-1$ 的图象与直线 $y=at$,由图可知当 $a\leqslant 0$ 时不符合题意,当 $a>0$ 时,$f(t)$ 的图象与直线 $y=at$ 都过原点,考虑 $f(t)$ 的图象过原点的切线,设切点为 $P(t_0,e^{t_0}-1)$,$f'(t)=e^t$,则切线方程为 $y-(e^{t_0}-1)=e^{t_0}(t-t_0)$,且过原点,所以 $1-e^{t_0}=-t_0e^{t_0}$,即 $1-e^{t_0}+t_0e^{t_0}=0$,设 $g(t)=1-e^t+te^t$,则 $g'(t)=te^t$,当 $t\in(-\infty,0)$ 时,$g'(t)<0$,$g(t)$ 单调递减,当 $t\in(0,+\infty)$ 时,$g'(t)>0$,$g(t)$ 单调递增,所以 $g(t)_{\min}=g(0)=0$,所以有唯一 $t_0=0$,使方程成立,即切点为 $(0,0)$,切线为 $y=t$.又易知 $e^t\geqslant t+1$,故所求的 a 的取值范围是 $\{1\}$.

三、解答题:共 70 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查正余弦定理的综合应用.

解析 (Ⅰ)因为 $B+D=\pi$,所以 $\cos D=-\cos B=-\dfrac{1}{3}$. ……………………………………………… (2 分)

在 $\triangle ACD$ 中,由余弦定理可得 $AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos D=1^2+3^2-2\times1\times3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=12$,

所以 $AC=2\sqrt{3}$. ……………………………………………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)设四边形 $ABCD$ 的面积为 S,则 $S=S_{\triangle BAC}+S_{\triangle DAC}$.

因为 $S_{\triangle DAC}=\dfrac{1}{2}DA\cdot DC\sin D=\dfrac{1}{2}DA\cdot DC\sqrt{1-\cos^2 D}=\sqrt{2}$. ……………………………………… (6 分)

在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理可得 $AB^2+BC^2-AC^2=2AB\cdot BC\cdot\cos B$, ……………………………… (7 分)

即 $2AB^2-12=\dfrac{2}{3}AB^2$,得 $AB=BC=3$, ……………………………………………………………… (9 分)

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\sin B=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\sqrt{1-\cos^2 B}=3\sqrt{2}$, …………………………… (11 分)

故四边形 $ABCD$ 的面积为 $\sqrt{2}+3\sqrt{2}=4\sqrt{2}$. ………………………………………………………… (12 分)

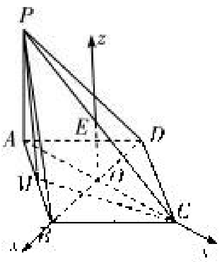
18. **命题意图** 本题考查线线垂直的证明及线面角的正弦值的求解.

解析 (Ⅰ)如图,连接 AC 交 BD 于点 O,因为四边形 $ABCD$ 为菱形,所以 $AC\perp BD$. ……………………… (1 分)

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,$BD\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $PA\perp BD$,又 $AC\cap PA=A$,所以 $BD\perp$ 平面 PAC, ……………………………………………… (4 分)

又 $PC\subset$ 平面 PAC,所以 $BD\perp PC$. ……………………………………………………………………… (5 分)



(Ⅱ)设 E 为 PC 的中点,易知 $OE\perp$ 底面 $ABCD$.

以 O 为原点,OB,OC,OE 所在直线分别为 x,y,z 轴可建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$, ……… (6 分)

则 $A(0,-\sqrt{3},0)$,$B(1,0,0)$,$C(0,\sqrt{3},0)$,$D(-1,0,0)$,$P(0,-\sqrt{3},2)$.

因为 M 为 AB 的中点,所以 $M\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,

所以 $\overrightarrow{PC}=(0,2\sqrt{3},-2)$,$\overrightarrow{PM}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},-2\right)$,$\overrightarrow{DC}=(1,\sqrt{3},0)$. ………………………

设平面 MPC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_0,y_0,z_0)$，

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PM}=0,\end{cases}$可得$\begin{cases}2\sqrt{3}y_0-2z_0=0,\\ \dfrac{x_0}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y_0-2z_0=0,\end{cases}$

令 $y_0=\sqrt{3}$，可得 $\boldsymbol{n}=(9,\sqrt{3},3)$. ……………………………………………………（9 分）

设直线 CD 与平面 MPC 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{DC}|}=\dfrac{9+3}{\sqrt{9^2+(\sqrt{3})^2+3^2}\times 2}=\dfrac{2\sqrt{93}}{31}$，………（11 分）

即直线 CD 与平面 MPC 所成角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{93}}{31}$. ……………………………………………（12 分）

19. **命题意图**　本题考查抛物线的性质，直线与抛物线的综合应用.

解析　（Ⅰ）由题意得 $F(1,0)$，设直线 l 的方程为 $x=ty+1$，$M(x_1,y_1)(y_1>0)$，$N(x_2,y_2)$，……………（1 分）

联立方程得$\begin{cases}x=ty+1,\\ y^2=4x,\end{cases}$消去 x 可得 $y^2-4ty-4=0$，

由根与系数的关系得 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4$. ……………………………………………………（3 分）

因为 $|MN|=3|NF|$，所以 $|MF|=2|NF|$，有 $y_1=-2y_2$，

结合 $y_1y_2=-4$，解得 $y_1=2\sqrt{2}$，$y_2=-\sqrt{2}$，…………………………………………………（4 分）

所以 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

l 的方程为 $4x-\sqrt{2}y-4=0$. ……………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）以 QF 为直径的圆的圆心为$\left(\dfrac{n+1}{2},0\right)$，半径为$\dfrac{n-1}{2}$，……………………………………（7 分）

因为点 $M(x,y)$ 在该圆外，

所以$\left(x-\dfrac{n+1}{2}\right)^2+y^2>\left(\dfrac{n-1}{2}\right)^2$，即 $x^2+(3-n)x+n>0$ 对任意 $x>0$ 恒成立. ……………（9 分）

令 $h(x)=x^2+(3-n)x+n$，则

①$\Delta=(3-n)^2-4n=n^2-10n+9<0$，

解得 $1<n<9$；……………………………………………………………………………（10 分）

②$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ \dfrac{n-3}{2}\leqslant 0,\\ h(0)\geqslant 0,\end{cases}$解得 $0\leqslant n\leqslant 1$，又 $n\neq 1$，故 $0\leqslant n<1$. ………………………………（11 分）

综上所述，n 的取值范围是 $[0,1)\cup(1,9)$. ……………………………………………………（12 分）

20. **命题意图**　本题考查随机变量的分布列及概率的计算.

解析　（Ⅰ）乙队决赛答对题数 X 的所有可能取值为 $0,1,2,3,4$，X 服从二项分布 $B\left(4,\dfrac{1}{2}\right)$，…………（2 分）

所以 X 的概率分布列如下表：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

……………………………………………………………………………………………

（Ⅱ）设甲队答对 A 组题的题数为 i 的事件为 $A_i(i=0,1,2)$，答对 B 组题的题数为 i 的事件为 $B_i(i=0,1,2)$，乙队答对 A 组题的题数为 i 的事件为 $a_i(i=0,1,2)$，答对 B 组题的题数为 i 的事件为 $b_i(i=0,1,2)$.

甲队答对 3 题，乙队至少答对 2 题，且甲队获得冠军，只能是乙队答对 2 题或 3 题.

分两种情况：

①记"甲队答对 3 题，乙队答对 2 题，且甲队获得冠军"的事件为 M_1，

则 $M_1=A_2B_1a_2+A_2B_1b_2+A_2B_1a_1b_1+A_1B_2a_2+A_1B_2b_2+A_1B_2a_1b_1$，

所以 $P(M_1)=\left(\frac{2}{3}\right)^2C_2^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{3}{8}+C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$. ……………………（7 分）

②记"甲队答对 3 题，乙队答对 3 题，且甲队获得冠军"的事件为 M_2，

则 $M_2=A_2B_1a_2b_1+A_1B_2a_2b_1+A_1B_2a_1b_2$，

所以 $P(M_2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2C_2^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2C_2^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2C_2^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{18}$. ……………………（10 分）

故甲队答对 3 题，乙队至少答对 2 题，且甲队获得冠军的概率为 $P=P(M_1)+P(M_2)=\frac{1}{8}+\frac{1}{18}=\frac{13}{72}$.

……………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查利用导数研究函数的性质及证明不等式.

解析 （Ⅰ）由题可知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=-\frac{a}{x^2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}=-\frac{x^2-2x+2a}{2x^2}$. ……………………（1 分）

若 $x^2-2x+2a$ 的最小值 $2a-1\geqslant0$，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$，则 $x^2-2x+2a\geqslant0$ 恒成立，

即 $f'(x)\leqslant0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；……………………（2 分）

若 $1-\sqrt{1-2a}>0$，即 $0<a<\frac{1}{2}$，当 $x\in(0,1-\sqrt{1-2a})$ 或 $x\in(1+\sqrt{1-2a},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(1-\sqrt{1-2a},1+\sqrt{1-2a})$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；……………………（4 分）

若 $1-\sqrt{1-2a}\leqslant0$，即 $a\leqslant0$，当 $x\in(1+\sqrt{1-2a},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(0,1+\sqrt{1-2a})$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. ……………………（5 分）

综上，若 $a\geqslant\frac{1}{2}$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

若 $0<a<\frac{1}{2}$，$f(x)$ 在 $(0,1-\sqrt{1-2a})$，$(1+\sqrt{1-2a},+\infty)$ 上单调递减，在 $(1-\sqrt{1-2a},1+\sqrt{1-2a})$ 上单调递增；

若 $a\leqslant0$，$f(x)$ 在 $(1+\sqrt{1-2a},+\infty)$ 上单调递减，在 $(0,1+\sqrt{1-2a})$ 上单调递增. ……………………（6 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $0<a<\frac{1}{2}$，且 $x_1+x_2=2$，$x_1x_2=2a$，……………………（7 分）

则 $f(x_1)+f(x_2)=a\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\ln x_1+\ln x_2=a\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}-\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\ln(x_1x_2)=\ln(2a)$.

欲证不等式即 $\ln(2a)<e^{2a}-2$，

设 $t=2a$，则 $0<t<1$，即证 $e^t-\ln t-2>0(0<t<1)$. ……………………（9 分）

设 $h(t)=e^t-\ln t-2$，则 $h'(t)=e^t-\frac{1}{t}$，

显然 $h'(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，因为 $h'\left(\frac{1}{3}\right)=e^{\frac{1}{3}}-3<0,h'(1)=e-1>0$，

所以 $h'(t)=0$ 在 $(0,1)$ 内有唯一根 t_0，即 $e^{t_0}=\frac{1}{t_0}$. ……………………（10 分）

当 $t\in(0,t_0)$ 时，$h'(t)<0,h(t)$ 单调递减，当 $t\in(t_0,1)$ 时，$h'(t)>0,h(t)$ 单调递增，

所以 $h(t)_{\min}=h(t_0)=e^{t_0}-\ln t_0-2=\frac{1}{t_0}-\ln\frac{1}{e^{t_0}}-2=\frac{1}{t_0}+t_0-2>0$，

所以 $h(t)>0(0<t<1)$，故原命题得证. ……………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查直角坐标方程与极坐标方程的互化，参数方程与普通方程的互化，极坐标方程的应用.

解析 （Ⅰ）l 的直角坐标方程为 $y=\sqrt{3}x$，化为极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$. ……………………（2 分）

将圆 C 的参数方程变形为 $\begin{cases}x-a=\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha,\end{cases}$ 平方相加得 $(x-a)^2+y^2=1$，……………………（3 分）

化为极坐标方程为 $\rho^2-2a\rho\cos\theta+a^2-1=0$. ……………………（5 分）

（Ⅱ）将 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 代入圆 C 的极坐标方程得 $\rho^2-a\rho+a^2-1=0$.

设 $|\rho_1|=|OP|,|\rho_2|=|OQ|$，则 $\rho_1+\rho_2=a,\rho_1\rho_2=a^2-1$，……………………（6 分）

$\Delta=a^2-4(a^2-1)>0$，解得 $0\leqslant a^2<\frac{4}{3}$. ……………………（7 分）

所以 $|OP|^2+|OQ|^2=\rho_1^2+\rho_2^2=(\rho_1+\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2=a^2-2(a^2-1)=2-a^2$. ……………………（8 分）

所以 $|OP|^2+|OQ|^2$ 的取值范围是 $\left(\frac{2}{3},2\right]$. ……………………（10 分）

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的性质与解法.

解析 （Ⅰ）$f\left(\frac{1}{2}\right)+f(-1)\geqslant 8$，即 $|a+1|+|a-2|+3\geqslant 8$，亦即 $|a+1|+|a-2|\geqslant 5$，……………………（1 分）

等价于不等式组 $\begin{cases}a\leqslant -1,\\ -a-1-a+2\geqslant 5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1<a\leqslant 2,\\ a+1-a+2\geqslant 5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a>2,\\ a+1+a-2\geqslant 5,\end{cases}$ ……………………（3 分）

解得 $a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 3$，故实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$. ……………………（5 分）

（Ⅱ）对任意的 $b\in(1,+\infty)$ 总存在 x_0，使 $f(x_0)<b+\frac{1}{b-1}+1$ 成立，等价于 $f(x)_{\min}<\left(b+\frac{1}{b-1}+1\right)_{\min}$.

……………………（6 分）

因为 $f(x)=|2x+a|+|2x-1|\geqslant|a+1|$，所以 $f(x)_{\min}=|a+1|$. ……………………（7 分）

又 $b+\frac{1}{b-1}+1=b-1+\frac{1}{b-1}+2\geqslant 4,b\in(1,+\infty)$，当且仅当 $b=2$ 时取等号，

所以 $\left(b+\frac{1}{b-1}+1\right)_{\min}=4$. ……………………（8 分）

由 $|a+1|<4$，解得 $-5<a<3$，故所求实数 a 的取值范围是 $(-5,3)$. ……………………（10 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。