

淮北市 2023 届高三第二次模拟考试

数学试题卷

注意事项:

- 答卷前, 考试务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上.
- 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号, 回答非选择题时, 将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
- 考试结束后, 将本答题卡交回.

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的.

- 已知 i 为虚数单位, 复数 $z = \frac{1-3i}{2+i}$, 则 $|z| =$
 A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{5}$
- 已知集合 $M = \{x \mid |x-4| < 5\}$, $N = \{x \mid 0 < \ln x < 2\}$, 则下列命题错误的是
 A. $\exists x_0 \in M, x_0 \notin N$ B. $\forall x \in N, x \in M$ C. $\exists x_0 \in N, x_0 \in M$ D. $\forall x \in M, x \notin N$
- 世界数学三大猜想: “费马猜想”、“四色猜想”、“哥德巴赫猜想”, 其中“四色猜想”和“费马猜想”已经分别在 1976 年和 1994 年荣升为“四色定理”和“费马大定理”. 280 多年过去了, 哥德巴赫猜想仍未解决, 目前最好的成果“ $1+2$ ”由我国数学家陈景润在 1966 年取得. 哥德巴赫猜想描述为: 任何不小于 4 的偶数, 都可以写成两个质数之和. 在不超过约 20 的质数中, 随机选取两个不同的数, 其和为偶数的选法有
 A. 28 B. 21 C. 15 D. 10
- 天气是影响生产、生活的重要因素. 淮北统计年鉴上显示 2021 年淮北市分月平均气温和降水量如下表:

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
温度($^{\circ}\text{C}$)	2.1	8.0	10.3	14.6	21.1	27.3	27.3	26.3	24.2	17.0	10.3	4.4
降雨量(mm)	6.7	26.5	55.4	28.6	94.9	99.9	560.7	238.3	137.5	20.4	24.2	1.3

- 则 2021 年淮北市平均气温的众数和降水量的 75% 分位数分别是
 A. 10.3; 99.9 B. 27.3; 118.7 C. 10.3、27.3; 118.7 D. 10.3、27.3; 137.5
- 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$ 且 $\vec{b} = (3, -4)$, 则 \vec{a} 在 \vec{b} 上的投影向量为
 A. $(-6, 8)$ B. $(6, -8)$ C. $(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$ D. $(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5})$
 - 已知 $A(-2, 0), B(2, 0)$, 过 $P(0, -1)$ 斜率为 k 的直线上存在不同的两个点 M, N 满足: $|MA| - |MB| = |NA| - |NB| = 2\sqrt{3}$. 则 k 的取值范围是
 A. $(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$ B. $(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$

数学试题第 1 页(共 4 页)

C. $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$ D. $(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$

7. 若关于 x 的方程 $2x^3 - 3x^2 - 12x + k = 0$ 有 3 个不同实根, 则满足条件的整数 k 的个数是

- A. 24 B. 26 C. 29 D. 31

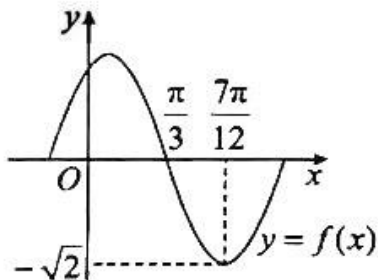
8. 已知球 O 和正四面体 $A-BCD$, 点 B, C, D 在球面上, 底面 BCD 过球心 O , 棱 AB, AC, AD 分别交球面于 B_1, C_1, D_1 , 若球的半径 $R = \sqrt{3}$, 则所得多面体 $B_1C_1D_1-BCD$ 的体积为

- A. $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ B. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{23\sqrt{2}}{12}$ D. $\frac{13\sqrt{2}}{6}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ (其中 A, ω, φ 是常数, $A > 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则下列说法正确的是

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π
 B. $\varphi = \frac{\pi}{6}$
 C. $f(x)$ 在 $[-1, \frac{1}{\pi}]$ 上单调递增
 D. 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位, 得到函数 $g(x) = \sqrt{2}\cos 2x$ 的图象



(第 9 题图)

10. 设 a, b 为两个正数, 定义 a, b 的算术平均数为 $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$, 几何平均数为 $G(a, b) = \sqrt{ab}$. 上个世纪五十年代, 数学家 D.H. Lehmer 提出了“Lehmer”均值, 即 $L_p(a, b) = \frac{a^p + b^p}{a^{p-1} + b^{p-1}}$, 其中 p 为有理数. 下列结论中一定正确的有

- A. $L_{0.5}(a, b) \leq L_1(a, b)$ B. $L_0(a, b) \leq G(a, b)$
 C. $L_2(a, b) \leq A(a, b)$ D. $L_{n+1}(a, b) \leq L_n(a, b)$

11. 已知点 $A(-1, 0)$, 点 B 在 $\odot O: x^2 + y^2 = 1$ 上运动, 边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 $BCDE$ 的顶点 C, D, E 位于圆 O 外, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$ 的值可能是

- A. 0 B. $2\sqrt{5}$ C. 8 D. 10

12. 已知棋盘上标有第 $0, 1, 2, \dots, 100$ 站, 棋子开始时位于第 0 站, 棋手抛掷均匀硬币走跳棋游戏. 若掷出正面, 棋子向前跳一站; 若掷出反面, 棋子向前跳两站, 直到跳到第 99 站 (胜利大本营) 或第 100 站 (欢乐大本营) 时, 游戏结束. 设棋子跳到第 n 站的概率为 $P_n, (n \in N)$.

- A. $P_1 = \frac{1}{2}$ B. $P_3 = \frac{3}{8}$
 C. $P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{2}P_{n-1}, (1 \leq n \leq 98)$ D. $P_{100} = \frac{2}{3}(1 + \frac{1}{2^{101}})$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 二项式 $(x - \frac{2}{\sqrt{x}})^6$ 展开式中的常数项为 $\underline{\hspace{2cm}}$ (用数字作答)

14. 若 $\cos(\alpha + \frac{\pi}{12}) = \frac{2}{3}$, 则 $\sin(2\alpha + \frac{2\pi}{3}) = \underline{\hspace{2cm}}$

15. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 左右焦点分别为 F_1, F_2 , 下顶点 B , 过 F_1, B 的直线交椭圆于点 M , 点 M 关于 x 轴的对称点为 N , 若 $MB \perp NF_2$, 则椭圆 E 的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 来源: 高三答案公众号

16. 已知函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 若对任意的实数 x, y, z 都有 $f(xy) + f(xz) - 2f(x)f(yz) \geq \frac{1}{2}$, 则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$; $[1 \cdot f(1)] + [2 \cdot f(2)] + \dots + [2023 \cdot f(2023)] = \underline{\hspace{2cm}}$ (其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数)(第一个空 2 分, 第二个空 3 分)

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分) 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, \frac{a_{n+1}}{3a_n} = 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$.

(I) 设 $b_n = \frac{n^2 - 7n}{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的最大项;

(II) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (本题满分 12 分) 已知 $\triangle ABC$ 的角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $c(\sin C - \sqrt{3}\sin B) = (a - b)(\sin A + \sin B)$.

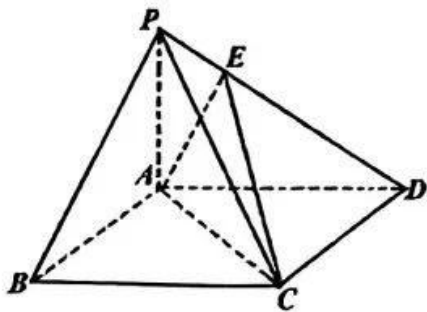
(I) 求 A ;

(II) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, $\sin B = 1 + \cos C$, D 为 BC 的中点, 求线段 AD 的长.

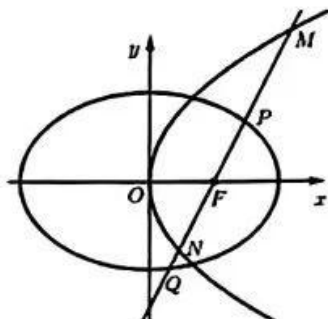
19. (本题满分 12 分) 如图所示, 四棱锥 $P - ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $\angle ABC = 60^\circ, PC \perp BD, PA = AB = \frac{\sqrt{2}}{2}PB$.

(I) 证明: $PA \perp$ 面 $ABCD$;

(II) 线段 PD 上是否存在点 E , 使平面 ACE 与平面 PAB 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{13}$? 若存在, 指出点 E 位置; 若不存在, 请说明理由.



(第 19 题图)



(第 21 题图)

20. (本题满分 12 分) 社会人口学是研究人口因素对社会结构和社会发展的影响和制约的一门社会学分支学科. 其基本内容包括: 人口作为社会变动的原始依据的探讨; 将人口行为作为引起社会体系特征变动的若干因素中的一个因素来研究. 根据社会人口学研究发现, 一个家庭有 ξ 个孩子(仅考虑不超过 3 个孩子家庭)的概率分布列为:

ξ	1	2	3	0
概率	$\frac{m}{p}$	m	$m(1-p)$	$m(1-p)^2$

其中 $m > 0, 0 < p < 1$, 每个孩子的性别是男孩还是女孩的概率均为 $\frac{1}{2}$ 且相互独立, 记 A_i 表示事件“一个家庭有 i 个孩子 ($i = 0, 1, 2, 3$)”, B 表示事件“一个家庭的男孩比女孩多(若一个家庭只有一个孩子且恰为男孩, 则该家庭男孩多)”

- (I) 若 $p = \frac{1}{2}$, 求 $P(B)$; 来源: 高三答案公众号
 (II) 参数 p 受到各种因素的影响(如生育保险的增加, 教育、医疗福利的增加等), 通过改变参数 p 的值来调控未来人口结构. 若希望 $P(\xi = 2)$ 增大, 如何调控 p 的值?

参考公式: $P(M | N) = \frac{P(MN)}{P(N)}, P(M) = \sum_{k=1}^n P(M | N_k) P(N_k)$

21. (本题满分 12 分) 已知抛物线 $C_1: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点和椭圆 $C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点 F 重合, 过点 F 任意作直线 l 分别交抛物线 C_1 于 M, N , 交椭圆 C_2 于 P, Q , 当 l 垂直于 x 轴时 $|MN| = 4, |PQ| = 3$

- (I) 求 C_1 和 C_2 的方程;
 (II) 是否存在常数 m , 使 $\frac{1}{|MN|} + \frac{m}{|PQ|}$ 为定值? 若存在, 求出 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

22. (本题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = xe^{-x} + a \ln(1-x), a \in R$

- (I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
 (II) 当 $a > 0$ 时, 对任意的实数 $x_1, x_2 < 0$, 证明: $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw