

树德中学高 2021 级高二下期 5 月阶段性测试数学(文科)试题

命题人:肖兴佳 审题人:李小蛟、唐颖君、王钊

一、选择题:本大题共 12 个小题,每小题 5 分,共 60 分.每小题只有一项是符合题目要求的

1. 已知 $A = \{-3, 0, 1\}$, $B = \{-4, -3, 1\}$, 则 $A \cup B$ 的真子集的个数为 ()

- A. 3 B. 7 C. 15 D. 31

2. 若条件 $p: -1 < b < 1$, 条件 $q: -2 < b < 2$, 则 p 是 q 的 ()

- A. 必要而不充分条件 B. 充分而不必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 已知 a 为实数, 复数 $z = (a^2 - 1) + (a + 1)i$ 为纯虚数, 则 $\frac{a + i^3}{1 + i} = ()$

- A. 1 B. i C. $-i$ D. $1 - i$

4. 对具有线性相关关系的变量 x, y , 有一组观测数据 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, 3, \dots, 8)$,

其回归方程为 $\hat{y} = \frac{1}{6}x + a$, 且 $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_8 = 6$, $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_8 = 9$,

则实数 a 的值是 ()

- A. -2 B. 2 C. -1 D. 1

5. 已知命题 p : 对任意 $x \in \mathbf{R}, 2x^2 + 2x + \frac{1}{2} < 0$,

命题 q : 存在 $x \in \mathbf{R}, \sin x - \cos x = \sqrt{2}$, 则下列判断正确的是 ()

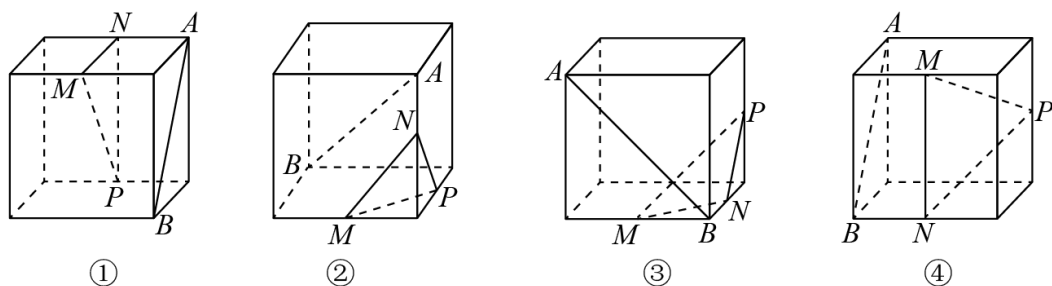
- A. p 是真命题 B. q 是假命题
C. p 的否定是假命题 D. q 的否定是假命题

6. 执行如图所示的程序框图后, 输出的值为 4, 则 p 的取值范围是 ()

- A. $\frac{7}{8} < p < \frac{15}{16}$ B. $p > \frac{15}{16}$
C. $\frac{3}{4} < p \leq \frac{7}{8}$ D. $\frac{7}{8} \leq p < \frac{15}{16}$

7. 下列各图中, A, B 为正方体的两个顶点, M, N, P 分别为其所在棱的中点,

能得出 $AB \parallel$ 平面 MNP 的图形的序号是 ()



- A. ①③ B. ②③ C. ①④ D. ②④

8. 若函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 2a \ln x$ 有两个不同的极值点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 2]$ B. $(0, 2]$ C. $(0, 2)$ D. $(2, +\infty)$

9. 已知 $a > 1, b > 1$, 且 $\frac{e^a}{a} = \frac{e^b + 1}{b}$, 则下列结论一定正确的是 ()

- A. $a > b$ B. $2^{a+1} < 2^b$ C. $2^a + 2^b < 2^3$ D. $a < b$

10. 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 圆 $(x - 1)^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ 与 C 的渐近线相切.

P 为 C 右支上的动点, 过 P 作两渐近线的垂线, 垂足分别为 A, B . 给出以下结论:

- ① C 的离心率 $e = 2$; ② 两渐近线夹角为 30° ;
③ $|PA| \cdot |PB|$ 为定值 $\frac{3}{4}$; ④ $|AB|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

则所有正确结论为 ()

- A. ①③④ B. ①③ C. ③④ D. ①②

11. 定义在 $(0, +\infty)$ 的函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 满足 $x^3 f'(x) + 8 > 0$, 且 $f(2) = 2$,

则不等式 $f(e^x) < \frac{4}{e^{2x}} + 1$ 的解集为 ()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(0, 2)$ C. $(-\infty, \ln 2)$ D. $(0, \ln 2)$

12. 在三棱锥 $P - ABC$ 中, $AB = 4, AC = 1, BC = \sqrt{13}, PA = 4, PB = 4\sqrt{2}, PC = \sqrt{17}$,

则此三棱锥的外接球的表面积为 ()

- A. $\frac{76\pi}{3}$ B. $\frac{100\pi}{3}$ C. $\frac{103\pi}{4}$ D. $\frac{98\pi}{3}$

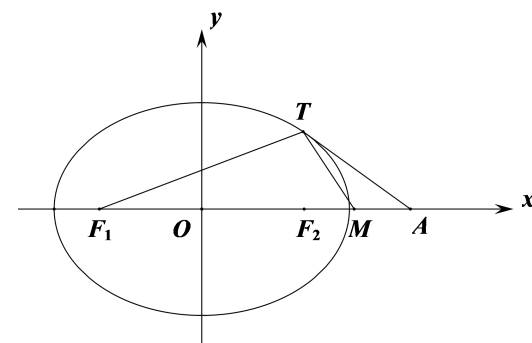
二、填空题:本大题共 4 个小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知点 A 是曲线 $\rho = 2\cos\theta$ 上任意一点, 则点 A 到直线 $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = 4$ 的距离的最小值是 _____

14. 设变量 x, y 满足: $\begin{cases} y \geq x \\ x + 3y \leq 4 \\ x \geq -2 \end{cases}$, 则 $z = 3y - x$ 的最大值为 _____.

15. 一只蚂蚁在边长分别为 3, 4, 5 的三角形区域内随机爬行, 则其恰在离三个顶点距离都大于 1 的地方的概率为 _____

16. 椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 $A(2, 0)$ 作椭圆的切线, 切点为 T , 若点 M 在线段 F_1A 上, 且满足 $\angle ATM = \angle AF_1T$, 则点 M 的坐标为 _____.



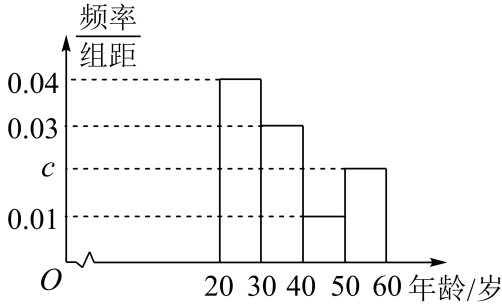
三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 - x + c$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；
- (2) 设函数 $g(x) = [f(x) - x^3] \cdot e^x$, 若函数 $g(x)$ 在 $x \in [-3, 2]$ 上单调递增, 求实数 c 的取值范围.

18. 某市为了宣传环保知识, 举办了一次“环保知识知多少”的问卷调查活动 (一人答一份). 现从回收的年龄在 20 ~ 60 岁的问卷中随机抽取了 100 份, 统计结果如下面的图表所示.

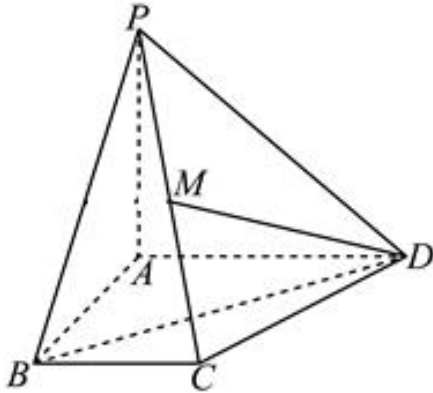
年龄分组	抽取份数	答对全卷的人数	答对全卷的人数占本组的概率
[20,30)	40	28	0.7
[30,40)	n	27	0.9
[40,50)	10	4	b
[50,60]	20	a	0.1



- (1) 分别求出 n, a, b, c 的值；
- (2) 从年龄在 $[40, 60]$ 答对全卷的人中随机抽取 2 人授予“环保之星”, 求年龄在 $[50, 60]$ 的人中至少有 1 人被授予“环保之星”的概率.

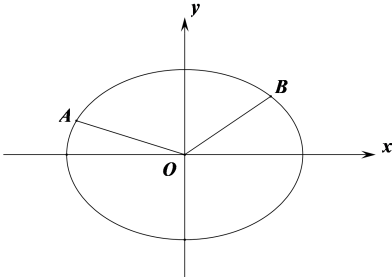
19. 如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 底面四边形 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, $PA = AD = AB = 2$, $BC = 1$, M 为 PC 中点.

- (1) 求证: $PB \perp DM$.
- (2) 求点 C 到平面 PBD 的距离.



20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, A, B 是椭圆上的三个不同的点, O 为坐标原点, 记 $\triangle AOB$ 的面积为 $S_{\triangle AOB}$.

- (1) 若 $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1), \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$, 求证: $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$;
- (2) 记直线 OA, OB 的斜率为 k_1, k_2 , 当 $k_1 k_2 = -\frac{1}{4}$ 时, 试探究 $S_{\triangle AOB}^2$ 是否为定值并说明理由.



21. 设函数 $f(x) = ax^3 + x (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 若直线 $y = 2x - 1$ 是函数 $y = f(x)$ 图像的一条切线, 求实数 a 的值;
- (2) 若 $a > 0$, 当 $x > 0$ 时, 不等式 $2x - 6a \sin x < f(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

22. 在直角坐标系中, 以原点为极点, x 轴的正半轴为极轴, 以相同的长度单位建立极坐标系. 已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 3$, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4a \cos \theta (a > 0)$.

- (1) 设 t 为参数, 若 $y = 2\sqrt{3} + \frac{1}{2}t$, 求直线 l 的参数方程;
- (2) 已知直线 l 与曲线 C 交于 P, Q , 设 $M(0, -2\sqrt{3})$, 且 $|PQ|^2 = |MP| \cdot |MQ|$, 求实数 a 的值.