岳阳市2023届高三教学质量检测第一次考试

数学参考答案

一、单项选择题(本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.)

1.B　2.C　3.C　4.D　5.B　6.A　7.A　8.D

二、多项选择题(本大题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分.)

9.ABD　10.ACD　11.BC　12.BCD

三、填空题(本大题共4小题，每小题5分，共20分.把答案填在答题卡中对应题号后的横线上.)

13.$-\frac{33}{65}$　14.198　15.$\frac{6}{5}$　16.(1)$\left(-2,+\infty\right)$　(2)-10或11

四、解答题(本大题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17.

解：(1)因为$\log_3 a_{n+1}-\log_3 a_n=1(n\in N^*)$，所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$------1分

所以数列$\{a_n\}$是首项为1公比为3的等比数列------3分

所以数列$\{a_n\}$的通项为$a_n=3^{n-1}$------4分

(2)由(1)知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{1\times(1-3^n)}{1-3}=\frac{3^n-1}{2}$------5分

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{(a_n+1)\times 2(S_n+1)}=\frac{3^n}{(3^{n-1}+1)(3^n+1)}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3^{n-1}+1}-\frac{1}{3^n+1}\right)$$------8分

所以

$$T_n=b_1+b_2+b_3+\dots+b_n=\frac{3}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^1+1}\right)+\left(\frac{1}{3^1+1}-\frac{1}{3^2+1}\right)+\dots+\left(\frac{1}{3^{n-1}+1}-\frac{1}{3^n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^n+1}\right)$$

数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n=\frac{3^{n+1}-3}{4(3^n+1)}$------10分

注：如果只化简$b_n=\frac{a_{n+1}}{(a_n+1)\times 2(S_n+1)}=\frac{3^n}{(3^{n-1}+1)(3^n+1)}$，并写出$T_n$表达式给1分

18.

解：设 Y 表示每个顾客取到食品所需的时间，用频率估计概率，得 Y 的分布列如下：

Y	1	2	3	4	5
P	0.05	0.45	0.35	0.1	0.05

--------------------1 分

(1)A 表示事件"恰好 4 分钟后，第三个顾客开始等待取食品"，则事件 A 对应三种情形：

①第一个人取到食品所需的时间为 1 分钟，且第二个人取到食品所需的时间为 3 分钟；②第一人取到食品所需的时间为 3 分钟，且第二人取到食品所需的时间为 1 分钟；③第一个和第二个人取到食品所需的时间均为 2 分钟．

所以 $P(A)=P(Y=1)P(Y=3)+P(Y=3)P(Y=1)+P(Y=2)P(Y=2)$

$=0.05\times0.35+0.35\times0.05+0.45\times0.45=0.2375$.---------------------------6 分

(2)X 所有可能的取值为 0,1,2.--7 分

$X=0$ 对应第一个人取到食品所需的时间超过 2 分钟，

所以 $P(X=0)=P(Y>2)=0.5$；

$X=1$ 对应第一个人取到食品所需的时间为 1 分钟且第二个人取到食品所需的时间超过 1 分钟，或第一个人取到食品所需的时间为 2 分钟，

所以 $P(X=1)=P(Y=1)P(Y>1)+P(Y=2)$

$=0.05\times0.95+0.45=0.4975$；

$X=2$ 对应两个人取到食品所需的时间均为 1 分钟，

所以 $P(X=2)=P(Y=1)P(Y=1)=0.05\times0.05=0.0025$；--------------------10 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.5	0.4975	0.0025

--------------11 分

$E(X)=0\times0.5+1\times0.4975+2\times0.0025=0.5025$.-------------------------12 分

19.

解：(1)由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 又 $b^2-a^2=ac$

所以 $a(1+2\cos B)=c$ --2 分

由正弦定理得 $\sin A(1+2\cos B)=\sin C$ --3 分

又 $A+B+C=\pi$

所以 $\sin A(1+2\cos B)=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

得 $\sin A=\sin(B-A)$ ---5 分

在三角形中得 $A=B-A$ 或 $\pi-A=B-A$（舍去）

得 $B=2A$ --6 分

(2) 由(1)知 $B=2A$ 且 $A+B+C=\pi$，所以 $0<3A<\pi$ 所以 $0<A<\dfrac{\pi}{3}$--------------------7 分

$$\begin{aligned}\cos C+\cos A&=-\cos 3A+\cos A\\&=-\cos(2A+A)+\cos A\\&=\sin 2A\sin A-\cos 2A\cos A+\cos A\\&=2\sin^2 A\cos A-(2\cos^2 A-1)\cos A+\cos A\\&=4\cos A-4\cos^3 A\end{aligned}$$

--9 分

令 $x=\cos A$. $f(x)=4x-4x^3$ 且 $\dfrac{1}{2}<x<1$

$f'(x)=4-12x^2=4(1-3x^2)$

可知当 $\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $f'(x)>0$ 所以 $f(x)=4x-4x^3$ 在 $\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 单调递增

可知当 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}<x<1$ 时 $f'(x)<0$ 所以 $f(x)=4x-4x^3$ 在 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}<x<1$ 单调递减

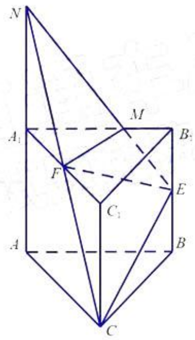
$f(x)$ 在 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时取到极大值也是最大值，且最大值为 $\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$

又 $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{2}$. $f(0)=0$. $f(\dfrac{1}{2})>f(0)$，所以 $0<f(x)\le\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$

故 $\cos C+\cos A$ 的取值范围为 $(0,\dfrac{8\sqrt{3}}{9}]$--12 分

20.

解: (1)法一：延长 AA_1, CF 交于点 N，连 NE 交 A_1B_1 于 M 则可知平面 EFC 即平面 $CEMF$ 且 M 为 A_1B_1 靠近 B_1 的三等分点



所以 $A_1M=2$，又 $A_1F=\sqrt{2}$，$\angle BAC=45°$，

由余弦定理知 $MF^2=A_1M^2+A_1F^2-2A_1M\times A_1F\cos\angle BAC=2$

所以 $MF^2+A_1F^2=A_1M^2$

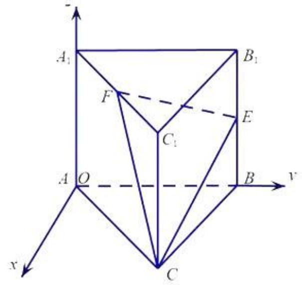
故△A_1MF 为直角三角形，$A_1F\perp MF$

直三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中，$AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，所以 $AA_1\perp MF$，

又 $AA_1\cap A_1C_1=A_1$

所以 $MF\perp$ 平面 A_1ACC_1，$MF\subset$ 平面 EFC

所以平面 $EFC\perp$ 平面 A_1ACC_1-----------6 分



法二：如图所示，以 A 为原点，$\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA_1}$ 为 y 轴和 z 轴的正方向，过 A 作 y 轴垂线为 x 轴建立空间直角坐标系，设 $A_1A=2a$，

则 $A(0,0,0),C(2,2,0),F(1,1,2a),E(0,3,a),A_1(0,0,2a),C_1(2,2,2a)$

所以 $\overrightarrow{CE}=(-2,1,a),\overrightarrow{CF}=(-1,-1,2a),\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$.

$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2a)$

设平面 EFC 的一个法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CF}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x_1+y_1+az_1=0\\ -x_1-y_1+2az_1=0\end{cases}$

令 $x_1=1$，则 $\vec{n}=(1,1,\frac{1}{a})$

设平面 A_1ACC_1 的一个法向量为 $\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_2+2y_2=0\\ 2az_1=0\end{cases}$

令 $x_2=1$，则 $\vec{m}=(1,-1,0)$

所以 $\vec{m}\cdot\vec{n}=(1,-1,0)\cdot(1,1,\frac{1}{a})=0$ 所以 $\vec{m}\perp\vec{n}$ 故平面 $EFC\perp$ 平面 A_1ACC_1 ---------------------6 分

(2) $\overrightarrow{EC_1}=(2,-1,a)$，由(1)知平面 EFC 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,1,\frac{1}{a})$

由直线 EC_1 与平面 EFC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 得 $|\cos<\overrightarrow{EC_1},\vec{n}>|=\frac{2}{\sqrt{5+a^2}\times\sqrt{2+\frac{1}{a^2}}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

得 $2a^4-7a^2+5=0$ 得 $a=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 或 $a=1$

因为 $A_1A<3$，所以 $a=1$

当 $a=1$ 时，$\vec{n}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{AC_1}=(2,2,2)$，知 $\overrightarrow{AC_1}//\vec{n}$，所以 $AC_1\perp$ 平面 EFC

而 $AC_1\subset$ 平面 AB_1C_1，故平面 $AB_1C_1\perp$ 平面 EFC --12 分

21.

解：（1）法一：设 $E(x_0,y_0)$，过 $E(x_0,y_0)$ 且平行 l_2 的直线方程为 $y-y_0=-2(x-x_0)$

由$\begin{cases} y-y_0=-2(x-x_0) \\ y=2x \end{cases}$得交点$A$的横坐标为$\dfrac{2x_0+y_0}{4}$

所以$|OA|=\sqrt{1+2^2}\,|\dfrac{2x_0+y_0}{4}|=\dfrac{\sqrt{5}}{4}|2x_0+y_0|$

E点到直线l_1的距离为$\dfrac{|2x_0-y_0|}{\sqrt{5}}$

所以$\dfrac{|2x_0-y_0|}{\sqrt{5}}\times\dfrac{\sqrt{5}}{4}|2x_0+y_0|=4$即$\dfrac{x_0^{\ 2}}{4}-\dfrac{y_0^{\ 2}}{16}=1$或$\dfrac{y_0^{\ 2}}{16}-\dfrac{x_0^{\ 2}}{4}=1$

故动点E的轨迹方程为$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$或$\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{4}=1$--5 分

法二：设$E(x,y)$，E点到直线l_1的距离为h_1，到直线l_2的距离为h_2，$\angle BOA=2\alpha$

四边形$OAEB$（O为原点）的面积为S

则$S=|OA|h_1=|OB|h_2=|OA||OB|\sin 2\alpha$

所以$S^2=|OA||OB|h_2h_1$所以$S\sin 2\alpha=h_2h_1$

$\tan\alpha=2$时，$\sin 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{5}$，

$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$时，$\sin 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{4}{5}$

又$h_1=\dfrac{|2x-y|}{\sqrt{5}},h_2=\dfrac{|2x+y|}{\sqrt{5}}$所以$\dfrac{|2x-y|}{\sqrt{5}}\times\dfrac{|2x+y|}{\sqrt{5}}=\dfrac{16}{5}$

得动点E的轨迹方程为$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$或$\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{4}=1$--5 分

（2）由题知E_0的方程为$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$

设$N(0,y_N)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

当直线m的斜率为 0 时，$N(0,0)$

若$P(-2,0)$，$Q(2,0)$，因为$\overrightarrow{NM}=\lambda\overrightarrow{MP}$，$\overrightarrow{NM}=\mu\overrightarrow{MQ}$，知$\lambda=-\dfrac{1}{3},\mu=1$，所以$\lambda+\mu=\dfrac{2}{3}$

若$Q(-2,0)$，$P(2,0)$，因为$\overrightarrow{NM}=\lambda\overrightarrow{MP}$，$\overrightarrow{NM}=\mu\overrightarrow{MQ}$，知$\lambda=1,\mu=-\dfrac{1}{3}$，所以$\lambda+\mu=\dfrac{2}{3}$

当直线m的斜率不为0时,设直线m的方程为$x=ty+1$（显然$t\neq 0$），则$N\left(0,-\dfrac{1}{t}\right)$，即$y_N=-\dfrac{1}{t}$

因为$\overrightarrow{NM}=\lambda\overrightarrow{MP}$，$\overrightarrow{NM}=\mu\overrightarrow{MQ}$，

所以$(1,-y_N)=\lambda(x_1-1,y_1)$，$(1,-y_N)=\mu(x_2-1,y_2)$，

解得$\lambda=-\dfrac{y_N}{y_1}$，$u=-\dfrac{y_N}{y_2}$，$\lambda+\mu=-y_N\left(\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}\right)=-y_N\cdot\dfrac{y_1+y_2}{y_1y_2}$.

由$\begin{cases}x=ty+1\\4x^2-y^2=16\end{cases}$消$x$并整理成$(4t^2-1)y^2+8ty-12=0$

因为直线m与曲线E_0有两个交点，则在$4t^2-1\neq 0$且判别式$\Delta>0$时有

$y_1+y_2=\dfrac{-8t}{4t^2-1}$且$y_1y_2=\dfrac{-12}{4t^2-1}$

所以$\lambda+\mu=\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{-8t}{4t^2-1}\cdot\dfrac{4t^2-1}{-12}=\dfrac{2}{3}$

即证$\lambda+\mu$为定值$\dfrac{2}{3}$--12 分

22.

解：(1)令$F(x)=f(x)-g(x)=k\ln(x+1)-x,x\in[0,+\infty)$则$F'(x)=\dfrac{k}{1+x}-1=\dfrac{(k-1)-x}{1+x}$

当$k\le 1$时，$k-1-x\le 0$对于$x\in[0,+\infty)$恒成立，又$1+x>0$所以$F'(x)\le 0$恒成立

所以$F(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减
所以当$x=0$时，$F(x)$有最大值，且最大值为0

当$k>1$时知$0<x<k-1$时$F'(x)>0$，函数$F(x)$单调递增

$x>k-1$时$F'(x)<0$，函数$F(x)$单调递减

所以$x=k-1$时$F(x)$有最大值，且最大值为$k\ln k-k+1$
综上，当$k\le 1$时$y=f(x)-g(x)$的最大值为0
当$k>1$时$y=f(x)-g(x)$的最大值为$k\ln k-k+1$---5 分

（2）由知（1）知，当$k<1$时，$x\in(0,+\infty)$时$y=f(x)-g(x)<0$

当$k>1$时，对任意的$x\in(0,k-1)$，$y=f(x)-g(x)>0$

又欲$|f(x)-g(x)|<kx^2$成立，显然$k>0$

当 $0<k<1$ 时，$|f(x)-g(x)|=g(x)-f(x)=x-k\ln(1+x)$

令 $M(x)=x-k\ln(1+x)-kx^2, x\in[0,+\infty)$，则有

$$M'(x)=1-\frac{k}{1+x}-2kx=\frac{-2kx^2+(1-2k)x+1-k}{1+x}, x\in(0,+\infty)$$

$-2kx^2+(1-2k)x+1-k=0$ 有两个不同实数根 $x_1=\dfrac{1-2k-\sqrt{1+4k-4k^2}}{4k}$,

$x_2=\dfrac{1-2k+\sqrt{1+4k-4k^2}}{4k}$, 且 $x_1<0<x_2$

故当 $0<x<x_2$ 时，$M'(x)>0$，$M(x)$ 在 $0<x<x_2$ 上单调递增

故 $M(x)>M(0)=0$ 即 $|f(x)-g(x)|>kx^2$，所以满足题意的 t 不存在

当 $k>1$ 时由(1)知存在 $x_0=k-1>0$，使得对任意的 $x\in(0,x_0)$ 恒有 $f(x)-g(x)>0$

此时 $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)=k\ln(1+x)-x$

令 $N(x)=k\ln(1+x)-x-kx^2, x\in(0,+\infty)$，则有

$$N'(x)=\frac{k}{1+x}-1-2kx=\frac{-2kx^2-(2k+1)x+k-1}{1+x}, x\in(0,+\infty)$$

$-2kx^2-(2k+1)x+k-1=0$ 有两个不同实数根 $x_1=\dfrac{-(2k+1)-\sqrt{12k^2-4k+1}}{4k}$

$x_2=\dfrac{-(2k+1)+\sqrt{12k^2-4k+1}}{4k}$ 且 $x_1<0<x_2$

故当 $0<x<x_2$ 时，$N'(x)>0$，$N(x)$ 在 $0<x<x_2$ 上单调递增

故 $N(x)>N(0)=0$ 即 $|f(x)-g(x)|>kx^2$，

记 x_0 与 x_2 中较小者为 x_0'，则当 $0<x<x_0'$ 时恒有 $|f(x)-g(x)|>kx^2$，
所以满足题意的 t 不存在

当 $k=1$ 时，则(1)知，当 $x\in(0,+\infty)$，$|f(x)-g(x)|=g(x)-f(x)=x-\ln(1+x)$

令 $h(x)=x-\ln(1+x)-x^2, x\in(0,+\infty)$，则有

$$h'(x)=1-\frac{1}{1+x}-2x=\frac{-2x^2-x}{1+x}, x\in(0,+\infty)$$

当 $x>0$ 时 $h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $x>0$ 时单调递减，故 $h(x)<h(0)=0$

故当 $x>0$ 时，恒有 $|f(x)-g(x)|<x^2$，此时，任意实数 t 满足题意

综上，$k=1$--12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。