河南省顶级名校2022届高三上学期9月开学联考

数学（理科）试卷

注意事项：

1．本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答第Ⅰ卷时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3．回答第Ⅱ卷时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

4．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{x\mid (x-1)(x-3)\geq 0\}$，集合 $B=\{0,1,2,3\}$，则 $(\complement_R A)\cap B$ 等于

A．$\{2\}$　　B．$\{3\}$

C．$\{1,2\}$　　D．$\{1,2,3\}$

2．已知复数z在复平面内对应的点在直线 $y=-x$ 上，且 $|z|=\sqrt{2}$，则 $z(1+i)=$

A．2　　B．-2

C．± 2　　D．$2i$

3．已知命题p：$\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\sin x<\tan x$；命题q：$\exists x\in(-\infty,0)$，$\pi^{-x}<e^{-x}$，则下列命题为真命题的是

A．$p\wedge q$　　B．$p\wedge(\neg q)$

C．$(\neg p)\wedge q$　　D．$(\neg p)\vee q$

4．设函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3}{4}$（$\omega\in N^*$）在 $[\frac{5\pi}{12},\frac{5\pi}{6}]$ 上单调递减，则下列叙述正确的是

A．f（x）的最小正周期为 2π

B．f（x）关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 轴对称

C．f（x）在 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 上的最小值为 $-\frac{5}{4}$

D．f（x）关于点 $(\frac{2\pi}{3},0)$ 对称

5. 2021 年中国人民银行计划发行 60 个贵金属纪念币品种，以满足广大收藏爱好者的需要，其中牛年生肖币是收藏者的首选．为了测算如图所示的直径为 4 的圆形生肖币中牛形图案的面积，进行如下实验，即向该圆形生肖币内随机投掷 100 个点，若恰有 75 个点落在牛形图案上，据此可估算牛形图案的面积是

A. $\dfrac{3\pi}{2}$　　B. 3π

C. 6π　　D. 12π

6. 对实数 p、q 和向量 **a**，**b**，**c**，正确的是

A. p（**a**－**b**）＝p**a**－p**b**　　B. **a**·**b**·**c**＝**a**·（**b**·**c**）

C. 若｜**a**｜²**b**＝｜**b**｜²**a**，则 **a**＝**b**　　D. 若 p**a**＝q**a**（p、q∈**R**），则 p＝q

7. 若数列$\{b_n\}$满足：$b_1+3b_2+7b_3+\cdots+\left(2^n-1\right)b_n=2n$，则数列$\{b_n\}$的通项公式为

A. $b_n=2n-1$　　B. $b_n=2^n-1$

C. $b_n=\dfrac{1}{2^n-1}$　　D. $b_n=\dfrac{2}{2^n-1}$

8. 已知定义在 **R** 上的函数 f（x），其导函数为 $f'(x)$，当 x＞0 时 $f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}>0$，若 a＝2f（1），b＝f（2），c＝$4f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，则 a，b，c 的大小关系是

A. c＜b＜a　　B. c＜a＜b　　C. b＜a＜c　　D. a＜b＜c

9. 已知圆 C 与倾斜角为 $\dfrac{5\pi}{6}$ 的直线相切于点 N（3，$-\sqrt{3}$），且与曲线 $(x-1)^2+y^2=1$ 相外切，则圆 C 的方程为

A. $(x-4)^2+y^2=4$，$x^2+(y+2\sqrt{3})^2=12$

B. $(x+4)^2+y^2=4$，$x^2+(y+2\sqrt{3})^2=12$

C. $(x+4)^2+y^2=4$，$x^2+(y-4\sqrt{3})^2=36$

D. $(x-4)^2+y^2=4$，$x^2+(y+4\sqrt{3})^2=36$

10. 菜农采摘蔬菜，采摘下来的蔬菜会慢慢失去新鲜度．已知某种蔬菜失去的新鲜度 h 与其采摘后时间 t（小时）满足的函数关系式为 $h=m\cdot a^t$．若采摘后 20 小时，这种蔬菜失去

的新鲜度为20%，采摘后30小时，这种蔬菜失去的新鲜度为40%．那么采摘下来的这种蔬菜在多长时间后失去50%新鲜度（参考数据 lg 2≈0．3，结果取整数）

A．23小时　　B．33小时　　C．50小时　　D．56小时

11．直角坐标系中横坐标、纵坐标均为整数的点称为整点，如果函数 f（x）的图象恰好通过 k 个整点，则称函数 f（x）为 k 阶整点函数．下列函数不是一阶整点函数的是

A．y＝2sinx＋3　　B．$y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1$

C．y＝lg（x＋2）＋1，x∈（3，9）　　D．$y=\sqrt{3}x^3-2\sqrt{3}x^2$

12．已知过 P（$\frac{3}{4}$，0）的直线与抛物线 $y^2=3x$（x＞0）交于 A，B 两点，M 为弦 AB 的中点，O 为坐标原点，直线 OM 与抛物线的另一个交点为 N，则两点 N、M 纵坐标的比值范围是

A．（2，＋∞）　　B．（3，＋∞）　　C．[2，＋∞）　　D．[3，＋∞）

第II卷

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13．$x\cdot\left(\frac{1}{x}-x\right)^7$ 的展开式中的常数项为__________．

14．据《九章算术》记载：将底面钝角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的菱形的直棱柱对角面斜割一分为二得到的两个一模一样的三棱柱体，古人称之为堑堵．若堑堵的所有棱长都为3，则其外接球的表面积为__________．

15．在△ABC 中，角 A、B、C 的对边分别是 a、b、c，已知 $c=\frac{2a+b-\sqrt{3}\cdot a\cdot\sin C}{\cos A}$，则角 C 的值为__________．

16．已知两点 F、Q 分别是焦距为 $4\sqrt{6}$ 的双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的右焦点及左支上一动点，单位圆与 y 轴的交点为 P，且｜PQ｜＋｜QF｜＋｜PF｜≥13，则双曲线 C 的离心率的最大值为__________．

三、解答题：本大题共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答．第22、23题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共60分．

17.（本小题满分 12 分）

为全面贯彻落实《中华人民共和国国家通用语言文字法》，实现“普通话初步普及，社会用字基本规范”的城市语言文字工作目标，国家启动了三类城市语言文字规范化达标创建评估工作．评估验收专家组在对某县语言文字工作进行考查评估期间，到县属新华学校对学生进行问卷调查，被调查者之间回答问题相互独立、互不影响．工作人员在新华学校随机抽取了甲、乙、丙三名学生，每位学生从事先准备的 5 个问题中随机抽取 2 个问题进行问卷调查．计分规则为：答对一个问题计 20 分，答错一个扣 10 分，最终三名学生得分相加为该校最终评估得分，总分位于[60，120）评定为合格．其中甲、乙、丙分别能答对 5 个问题中的 3 个、4 个、5 个．

（1）求甲、乙两名学生共计得分 20 分的概率；

（2）设随机变量 X 表示新华学校最终评估得分，求 X 的分布列及数学期望，并求出该校为合格的概率．

18.（本小题满分 12 分）

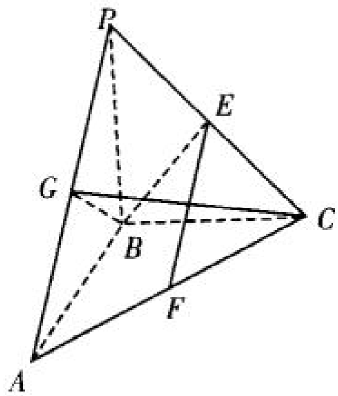
已知数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$满足：$a_{n+1}=2a_n+1$且$a_1=1$，$b_n=\log_2(a_n+1)$．

（1）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）数列$\{c_n\}$满足：$\dfrac{1}{c_n}-\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{a_n}{b_n}$，其中$n\in N^*$，若数列$\{c_n\}$的前 n 项和为H_n，求H_n．

19.（本小题满分 12 分）

在四面体 PABC 中，BA、BC、BP 两两垂直，等腰三角形 BAP 的底边长为$2\sqrt{2}$，点 G 为 PA 中点，BC＝$2\sqrt{3}$，EF 是△PAC 的中位线．



（1）求证：平面 PAB⊥平面 GBC；

（2）线段 AC 上一点 N 满足 $\overline{NP}\cdot\overline{BE}=0$，求直线 BE 与平面 NPB 所成角的正弦值.

20.（本小题满分 12 分）

已知 F_1，F_2 分别为椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的左、右焦点，椭圆上任意一点 P 到焦点距离的最小值与最大值之比为 $\dfrac{1}{3}$，过 F_1 且垂直于长轴的椭圆 C 的弦长为 3.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）过 F_1 的直线与椭圆 C 相交的交点 A、B 与右焦点 F_2 所围成的三角形的内切圆面积是否存在最大值?若存在，试求出最大值；若不存在，说明理由.

21.（本小题满分 12 分）

若函数 f（x）$=ae^x-3x^2$，（a∈**R**）.

（1）讨论 f（x）的极值点的个数；

（2）若 x∈[0，2]时，f（x）≥0 恒成立，则 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分．请考生在 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．

22.（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 极坐标方程为 $\rho\sin\theta=4$.

（1）M 为曲线 C_1 上的动点，点 P 在线段 OM 上，且满足｜OM｜·｜OP｜=16，求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程；

（2）已知 F（－1，0），过点 F 且倾斜角为 $\dfrac{\pi}{6}$ 的直线与 C_2 交于 A、B 两点，求｜FA｜+｜FB｜.

23.（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

已知 a＞0，b＞0，$a^2+b^2=2$.

证明：（1）$(a+b)(a^3+b^3)\geq 4$；

（2）$a^2b+b^2a\leq 2$.

数学(理科)参考答案

一、选择题

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	A	C	B	C	B	A	D	B	D	B	D	A

2. C 【解析】设 $z=a+bi$. 由题意得: $b=-a$, 且 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$, 解得 $z=1-\mathrm{i}$, 或 $z=-1+\mathrm{i}$, 所以 $z(1+\mathrm{i})=\pm2$. 故选 C.

4. C 【解析】由条件知 $\frac{1}{2}T\geqslant\frac{5\pi}{6}-\frac{5\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$, $\therefore\frac{\pi}{\omega}\geqslant\frac{5\pi}{12}$, $\therefore\omega\leqslant\frac{12}{5}$, $\because\omega\in\mathbf{N}^*$, $\therefore\omega=1$ 或 $\omega=2$. $\omega=1$ 时 $f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3}{4}$ 在 $\left[\frac{5\pi}{12},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上不单调递减; $\therefore\omega=2$, $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3}{4}$.

6. A 【解析】A 选项显然正确; B 选项中 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$, 表示与 $\boldsymbol{c}$ 平行的某个向量, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 平行的某个向量, 显然不一定相等, B 错误; C 选项中当 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时, C 错误, 同理 D 错误, 故选 A.

8. B 【解析】构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}(x>0)$, 得 $g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{1}{x}\left(f'(x)-\frac{f(x)}{x}\right)$,

由题知 $x>0$ 时 $g'(x)>0$. 故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

$\therefore\frac{f(2)}{2}>\frac{f(1)}{1}>\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}$, 即 $f(2)>2f(1)>4f\left(\frac{1}{2}\right)$, 即 $b>a>c$, 选 B.

10. B 【解析】由题意可得 $\begin{cases}h(20)=ma^{20}=0.2\\h(30)=ma^{30}=0.4\end{cases}$, 解得 $a=2^{\frac{1}{10}}$, $m=0.05$,

故 $h(t)=0.05\times(2^{\frac{1}{10}})^t$. 令 $h(t)=0.05\times(2^{\frac{1}{10}})^t=0.5$, 可得 $2^{\frac{t}{10}}=10$,

两边同时去对数, 故 $t=10\cdot\frac{\lg 10}{\lg 2}=\frac{10}{0.3}\approx33$ 小时.

12. A 【解析】设直线 AB: $my=x-\frac{3}{4}(m\neq0)$, 代入 $y^2=3x(x>0)$ 得 $y^2-3my-\frac{9}{4}=0$,

$\therefore y_M=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{3}{2}m$, $x_M=my_M+\frac{3}{4}=\frac{3}{2}m^2+\frac{3}{4}$, $\therefore K_{OM}=\frac{y_M}{x_M}=\frac{2m}{2m^2+1}$,

$\therefore$ 直线 OM: $y=\frac{2m}{2m^2+1}x$, 代入 $y^2=3x(x>0)$ 得 $y_N=\frac{3(2m^2+1)}{2m}$, $\therefore\frac{y_N}{y_M}=2+\frac{1}{m^2}>2$.

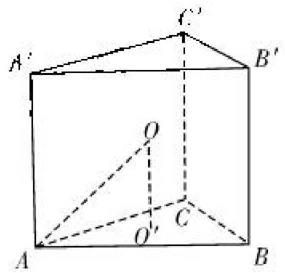
二、填空题

13. -35

14. 21π 【解析】球心 O 到下底面的距离 $OO'=\frac{3}{2}$, $AO'=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times3=\sqrt{3}$,

$\therefore$ 其外接球的半径 $R=\sqrt{AO'^2+OO'^2}=\sqrt{\frac{21}{4}}$,

$\therefore$ 其外接球的表面积为 $4\pi R^2=21\pi$.



15. $\frac{2\pi}{3}$ 【解析】由 $c=\frac{2a+b-\sqrt{3}\cdot a\cdot\sin C}{\cos A}$, 得 $2a+b-c\cos A-\sqrt{3}a\sin C=0$,

根据正弦定理得: $2\sin A+\sin B-\sin C\cos A-\sqrt{3}\sin A\sin C=0$,

$\therefore 2\sin A+\sin A\cos C+\cos A\sin C-\sin C\cos A-\sqrt{3}\sin A\sin C=0$,

又 $A\in(0,\pi)$，∴ $\sin A\neq 0$，∴ $-\frac{1}{2}\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C=1$，

即 $\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=1$，∵ $C\in(0,\pi)$，

∴ $-\frac{\pi}{6}<C-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，

∴ $C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，

∴ $C=\frac{2\pi}{3}$.

16. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ 【解析】设双曲线 C 的左焦点为 F'. 则 $|QF|-|QF'|=2a$，即 $|QF|=|QF'|+2a$，故 $|QF|+|PQ|=|QF'|+|PQ|+2a\geqslant|PF'|+2a$. 由题意可得 $|PF|=|PF'|=\sqrt{24+1}=5$，∵ $|PQ|+|QF|+|PF|\geqslant 13$. ∴ $a\geqslant\frac{3}{2}$. 则双曲线 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{6}}{a}\leqslant\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

三、解答题

17.【解析】(1) 记"甲、乙两位同学共计得分 20 分"为事件 M，等价于甲、乙两位同学共答对 2 题. 则事件 M 的概率为：$P(M)=\frac{C_3^1\cdot C_2^1\cdot C_4^1\cdot C_1^1+C_2^2\cdot C_4^2}{(C_5^2)^2}=\frac{3}{10}$. …………………… 3 分

(2) 由题意可知随机变量 X 的可能取值为 30、60、90、120，

$P(X=30)=\frac{C_2^2\cdot C_4^1\cdot C_1^1\cdot C_5^2}{(C_5^2)^3}=\frac{1}{25}$，$P(X=60)=P(M)=\frac{3}{10}$，

$P(X=90)=\frac{C_3^2\cdot C_4^1\cdot C_1^1\cdot C_5^2+C_3^1\cdot C_2^1\cdot C_4^2\cdot C_5^2}{(C_5^2)^3}=\frac{12}{25}$，

$P(X=120)=\frac{C_3^2\cdot C_4^2\cdot C_5^2}{(C_5^2)^3}=\frac{9}{50}$，…………………… 7 分

故随机变量 X 的分布列如下表所示：

X	30	60	90	120
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{9}{50}$

随机变量 X 的数学期望为：$EX=30\times\frac{1}{25}+60\times\frac{3}{10}+90\times\frac{12}{25}+120\times\frac{9}{50}=81$. …………………… 10 分

新华学校合格的概率 $P(X=60)+P(X=90)+P(X=120)=\frac{3}{10}+\frac{12}{25}+\frac{9}{50}=\frac{24}{25}$. …………………… 12 分

18.【解析】(1) 由 $a_{n+1}=2a_n+1$，令 $a_{n+1}+c=2(a_n+c)$，得 $c=1$，

∴ $\{a_n+1\}$ 是以 2 为首项，以 2 为公比的等比数列.

∴ $a_n+1=2\cdot 2^{n-1}$，即 $a_n=2^n-1$. ∴ $b_n=\log_2(a_n+1)=n$. …………………… 6 分

(2) 由题意知 $c_n=\frac{b_n}{a_n+1}=\frac{n}{2^n}$，∴ $H_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$ ①

$\frac{1}{2}H_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$ ②

①−②得，$\frac{1}{2}H_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$.

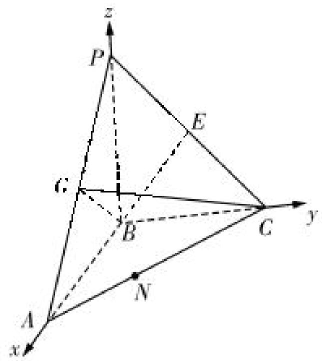
∴ $H_n=2-\frac{n+2}{2^n}$. …………………… 12 分

19.【解析】(1) ∵ BA、BC、BP 两两垂直，∴ $BC\perp$ 平面 PAB. 则 $BC\perp PA$，

又等腰三角形 BAP 的底边长为 $2\sqrt{2}$. EF 是 $\triangle PAC$ 的中位线，

∴ $BG\perp PA$. 又 $BG\cap BC=B$. ∴ $PA\perp$ 平面 GBC，

因为 $PA\subset$ 平面 PAB，则有平面 $GBC\perp$ 平面 PAB. ……………………



(2)分别以$\overrightarrow{BA}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{BP}$为x,y,z轴,建立空间直角坐标系,

那么$A(2,0,0)$,$C(0,2\sqrt{3},0)$,$P(0,0,2)$,$\therefore\overrightarrow{BE}=(0,\sqrt{3},1)$,

$\overrightarrow{AC}=(-2,2\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{PA}=(2,0,-2)$,

设$\overrightarrow{AN}=\lambda\overrightarrow{AC}=(-2\lambda,2\sqrt{3}\lambda,0)$,那么$\overrightarrow{PN}=(2-2\lambda,2\sqrt{3}\lambda,-2)$,

由$\overrightarrow{PN}\cdot\overrightarrow{BE}=0$,解得$\lambda=\frac{1}{3}$,$\therefore\overrightarrow{PN}=\left(\frac{4}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3},-2\right)$. ………………… 8 分

设平面NPB的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.则$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PN}=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0$.

即$\begin{cases}2z=0,\\ \frac{4}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}y-2z=0.\end{cases}$

令$x=\sqrt{3}$,得$y=-2$,$z=0$.$\therefore\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-2,0)$,

设直线BE与平面NPB所成角为θ,那么$\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BE}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$. ………………………… 12 分

20.【解析】(1)依题意易得:$(a-c):(a+c)=\frac{1}{3}$,$\frac{2b^2}{a}=3$,

得:$a=2$,$c=1$,$b^2=a^2-c^2=3$,故椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……………………………………… 4 分

(2)设$\triangle ABF_2$的内切圆半径为r,$\therefore S_{\triangle ABF_2}=\frac{1}{2}(|AF_2|+|AB|+|BF_2|)\cdot r$,

又$\because|AF_2|+|AB|+|BF_2|=8$.$\therefore S_{\triangle ABF_2}=4r$,

要使$\triangle ABF_2$的内切圆面积最大,只需$S_{\triangle ABF_2}$的值最大. ……………………………………………… 6 分

易知直线l斜率不为0,设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线l:$x=my-1$,

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ x=my-1\end{cases}$消去$x$得:$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$,

易得$\triangle>0$,且$y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$,$y_1\cdot y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$,

$\therefore S_{\triangle ABF_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1\cdot y_2}=\sqrt{\frac{36m^2}{(3m^2+4)^2}+\frac{36}{3m^2+4}}=\frac{12\sqrt{m^2+1}}{3(m^2+1)+1}$, …

…………………………………………………………………………………………… 8 分

设$t=\sqrt{m^2+1}\geqslant1$,则$S_{\triangle ABF_2}=\frac{12t}{3t^2+1}=\frac{12}{3t+\frac{1}{t}}$,

设$y=3t+\frac{1}{t}(t\geqslant1)$,$y'=3-\frac{1}{t^2}>0$,

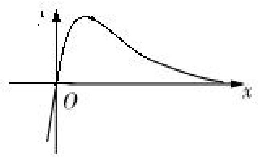
$\therefore$当$t=1$,即$m=0$时,$S_{\triangle ABF_2}$的最大值为3,

此时$r=\frac{3}{4}$,$\therefore\triangle ABF_2$的内切圆面积最大为$\frac{9\pi}{16}$. …………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)$\because f'(x)=ae^x-6x=e^x\left(a-\frac{6x}{e^x}\right)$,令$g(x)=\frac{6x}{e^x}$,

$\therefore g'(x)=\frac{6(1-x)}{e^x}$,$\therefore x<1$时$g'(x)>0$,$g(x)$在$(-\infty,1)$单调递增;

$\therefore x>1$时$g'(x)<0$,$g(x)$在$(1,+\infty)$单调递减.如图所示,$g(x)_{\max}=g(1)=\frac{6}{e}$,



$\therefore a\geqslant\frac{6}{e}$ 时，$a-\frac{6x}{e^x}\geqslant0$，$\therefore f'(x)\geqslant0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，无极值；

$0<a<\frac{6}{e}$ 时，$a-\frac{6x}{e^x}=0$ 有两个根 $x_1,x_2(0<x_1<x_2)$，

$\because x<x_1$ 时 $a-\frac{6x}{e^x}>0$，$f'(x)>0$；$x_1<x<x_2$ 时 $a-\frac{6x}{e^x}<0$，$f'(x)<0$；$x>x_2$ 时 $a-\frac{6x}{e^x}>0$，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 有两个极值点.

当 $a\leqslant0$ 时，$a-\frac{6x}{e^x}=0$ 有一个根 $x_0(x_0<0)$.

$\because x<x_0$ 时 $a-\frac{6x}{e^x}>0$，$f'(x)>0$；$x>x_0$ 时 $a-\frac{6x}{e^x}<0$，$f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$ 有一个极值点.

综上，$a\geqslant\frac{6}{e}$ 时无极值；$0<a<\frac{6}{e}$ 时，两个极值点；$a\leqslant0$ 时，一个极值点. …………………… 6 分

(2) 由 $\begin{cases}f(0)=a\geqslant0,\\ f(2)=ae^2-12\geqslant0\end{cases}\Rightarrow a\geqslant\frac{12}{e^2}$，…………………… 8 分

当 $a\geqslant\frac{6}{e}$ 时，由(1)知 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，$f(x)\geqslant0$ 成立；

当 $\frac{12}{e^2}\leqslant a<\frac{6}{e}$ 时，由(1)知 $a-\frac{6x}{e^x}=0$ 有两个根 $x_1,x_2(0<x_1<x_2\leqslant2)$，

当 $a=\frac{12}{e^2}$ 时 $f(x)$ 在 $[0,x_1]$ 上单调递增，在 $[x_1,2]$ 上单调递减，$f(x)\geqslant0$ 成立；

当 $\frac{12}{e^2}<a<\frac{6}{e}$ 时 $f(x)$ 在 $[0,x_1]$，$[x_2,2]$ 上单调递增，在 $[x_1,x_2]$ 上单调递减，

$\because a-\frac{6x_2}{e^{x_2}}=0$，$\therefore f(x_2)=ae^{x_2}-3x_2^2=6x_2-3x_2^2=3x_2(2-x_2)>0$，

$\therefore f(x)\geqslant0$ 成立. 综上，$a\geqslant\frac{12}{e^2}$. …………………… 12 分

22.【解析】(1) 设 P 的极坐标为 $(\rho,\theta)(\rho>0)$，M 的极坐标为 $(\rho_1,\theta)(\rho_1>0)$.

由题意知 $|OP|=\rho$，$|OM|=\rho_1=\frac{4}{\sin\theta}$.

由 $|OM|\cdot|OP|=16$ 得 C_2 的极坐标方程 $\rho=4\sin\theta(\rho>0)$.

因此 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+(y-2)^2=4(y\neq0)$. …………………… 5 分

(2) 设过 F 点的直线参数方程为 $\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\frac{1}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)，

将直线的参数方程代入 C_2 的方程，得 $t^2-(2+\sqrt{3})t+1=0$.

设 A、B 对应的参数分别为 t_1、t_2，

则 $t_1+t_2=2+\sqrt{3}$，$t_1t_2=1$，$\therefore t_1>0$，$t_2>0$，

则 $|FA|+|FB|=|t_1|+|t_2|=t_1+t_2=2+\sqrt{3}$. …………………… 10 分

23.【解析】(1) $(a+b)(a^3+b^3)=a^4+ab^3+ba^3+b^4\geqslant a^4+2\sqrt{ab^3\cdot ba^3}+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4$

$=(a^2+b^2)^2=4$，当且仅当 $a=b=1$ 时取等号；…………………… 5 分

(2) $\because 2=a^2+b^2\geqslant2ab$，$\therefore ab\leqslant1$(当且仅当 $a=b=1$ 时取等号) ①

又 $\because(a+b)^2\leqslant2(a^2+b^2)=4$，又 $\because a>0$，$b>0$，$\therefore a+b\leqslant2$(当且仅当 $a=b=1$ 时取等号) ②，

又 $\because a,b$ 均为正数，两式相乘得证. …………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。