

高三数学考试(文科)

(考试时间:120分钟 试卷满分:150分)

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 设集合 $A = \{x | (x+3)(x-5) < 0\}$, 则 $A \cap \mathbb{N}$ 的元素个数为
A. 4 B. 5 C. 6 D. 7
- 若函数 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π , 则 $f(x)$ 的解析式可以为
A. $f(x) = \sin x$ B. $f(x) = \tan(1 - \frac{1}{2}x)$
C. $f(x) = \tan x$ D. $f(x) = \cos(1 - \frac{1}{2}x)$
- 青少年近视情况日益严重,为了解情况,现从某校抽取部分学生,用对数视力表检查视力情况, A 组和 B 组数据结果用茎叶图记录(如图所示),其中茎表示个位数,叶表示十分位数。对于这两组数据,下列结论正确的是
A. 两组数据的中位数相等
B. 两组数据的极差相等
C. 两组数据的平均数相等
D. 两组数据的众数相等
- 在四面体 $ABCD$ 中, $\triangle BCD$ 为正三角形, AB 与平面 BCD 不垂直, 则
A. AB 与 CD 可能垂直 B. A 在平面 BCD 内的射影可能是 B
C. AB 与 CD 不可能垂直 D. 平面 ABC 与平面 BCD 不可能垂直
- 若 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 则下列函数是奇函数的是
A. $y = f(2^x + 2^{-x})$ B. $y = f(2^x - x)$
C. $y = f(2^x - 2^{-x})$ D. $y = f(2^x + x)$
- $(3 + \frac{1}{x^2})(1 + 4x^2)$ 的最小值为
A. $9\sqrt{3}$ B. $7 + 4\sqrt{2}$
C. $8\sqrt{3}$ D. $7 + 4\sqrt{3}$

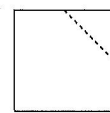
A		B
2 1 0	5	0 2
8 7 6 6 6 4 0	4	2 4 4 5 8 8 8 9

- 若一个等比数列的首项为 $\frac{1}{4}$, 公比为 2, S 是该等比数列前 10 项之和, S' 是该等比数列前 10 项的倒数之和, 则 $\frac{S}{S'} =$
A. 16 B. 32 C. 64 D. 128
- 已知函数 $f(x) = x^4 - x$ 的图象在原点 O 处的切线与在点 $A(1, 0)$ 处的切线的交点为 P , 则 $\tan \angle OPA =$
A. 2 B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{9}{2}$
- 已知两个单位向量 a, b 满足 a 与 $a - 2b$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$, 则 $a \cdot b =$
A. $\frac{1 - \sqrt{7}}{4}$ B. $\frac{1 \pm \sqrt{7}}{4}$ C. $\frac{1 - \sqrt{6}}{4}$ D. $\frac{1 \pm \sqrt{6}}{4}$
- 若函数 $p(x) = x^5 \ln x - a$ 有零点, 则 a 的取值范围是
A. $[-\frac{1}{e}, +\infty)$ B. $(-\infty, \frac{1}{e}]$
C. $[-\frac{1}{5e}, +\infty)$ D. $(-\infty, \frac{1}{5e}]$
- 已知 A, B, C 为椭圆 D 上的三点, AB 为长轴, $AB = 7, AC = 3, \angle BAC = 60^\circ$, 则 D 的离心率是
A. $\frac{2}{11}$ B. $\frac{3\sqrt{2}}{11}$ C. $\frac{3}{11}$ D. $\frac{\sqrt{22}}{11}$
- 已知数列 $\{a_n\}$ 共有 m 项, $a_1 = 111, a_2 = 217$, 且当 $n \in \mathbb{N}^*, 3 \leq n \leq m$ 时, $a_n = a_{n-2} - \frac{n-p}{a_{n-1}}$. 当项数 m 的最大值为 220 时, 常数 p 的值为
A. $\frac{109}{110}$ B. $\frac{108}{109}$ C. $\frac{110}{109}$ D. $\frac{109}{108}$

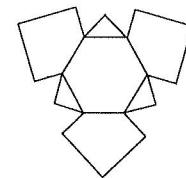
二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。把答案填在答题卡的相应位置。

- 右图为一个开关阵列, 每个开关只有“开”和“关”两种状态, 按其中一个开关 1 次, 将导致自身和所有相邻(上、下相邻或左、右相邻)的开关改变状态。若从这十六个开关中随机按其中一个开关 1 次, 则 $(2, 3)$ 的状态发生改变的概率为 $\frac{\blacktriangle}{\blacktriangle}$ 。
- 写出一个满足下列两个条件的复数: $z = \frac{\blacktriangle}{\blacktriangle}$ 。
① z^2 的实部为 5; ② z 的虚部不为 0。
- 设 A 是函数 $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 - 14}{7}}$ 图象上一点, $M(-3, 0), N(3, 0)$, 若 $|AM| \cdot |AN| = 21$, 则 $|AM| + |AN| = \frac{\blacktriangle}{\blacktriangle}$ 。
- 将 3 个 $6 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ 的正方形都沿其中的一对邻边的中点剪开, 每个正方形均分成两个部分, 如图(1)所示, 将这 6 个部分接于一个边长为 $3\sqrt{2} \text{ cm}$ 的正六边形上, 如图(2)所示。若该平面图沿着正六边形的边折起, 围成一个七面体, 则该七面体的体积为 $\frac{\blacktriangle}{\blacktriangle} \text{ cm}^3$ 。

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)



图(1)



图(2)

三、解答题:共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤. 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22,23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17. (12 分)

a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边. 已知 $c = \frac{5}{2}, 2\sin A = 3\sin B$.

(1)若 $\triangle ABC$ 的周长为 $\frac{25}{2}$, 求 a, b ;

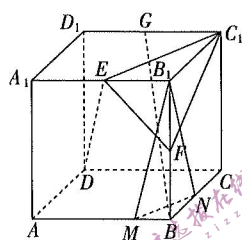
(2)若 $bc=5$, 证明: $A=2B$.

18. (12 分)

如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G 分别为 A_1B_1, BB_1, C_1D_1 的中点.

(1)过 BG 作该正方体的截面, 使得该截面与平面 C_1EF 平行, 写出作法, 并说明理由;

(2)设 M, N 分别为棱 AB, BC 上一点, M, N 与 B 均不重合, 且 $MN = C_1F$, 求三棱锥 $B-B_1MN$ 体积的最大值.



19. (12 分)

2022 年 12 月份以来, 全国多个地区纷纷采取不同的形式发放多轮消费券, 助力消费复苏. 记发放的消费券额度为 x (百万元), 带动的消费为 y (百万元). 某省随机抽查的一些城市的数据如下表所示.

x	3	3	4	5	5	6	6	8
y	10	12	13	18	19	21	24	27

(1)根据表中的数据, 请用相关系数说明 y 与 x 有很强的线性相关关系, 并求出 y 关于 x 的线性回归方程.

(2)(i)若该省 A 城市在 2023 年 2 月份准备发放一轮额度为 10 百万元的消费券, 利用(1)中求得的线性回归方程, 预计可以带动多少消费?

(ii)当实际值与估计值的差的绝对值与估计值的比值不超过 10% 时, 认为发放的该轮消费券助力消费复苏是理想的. 若该省 A 城市 2 月份发放额度为 10 百万元的消费券后, 经过一个月的统计, 发现实际带动的消费为 30 百万元, 请问发放的该轮消费券助力消费复苏是否理想? 若不理想, 请分析可能存在的原因.

$$\text{参考公式: } r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

当 $|r| > 0.75$ 时, 两个变量之间具有很强的线性相关关系.

参考数据: $\sqrt{35} \approx 5.9$.

20. (12 分)

已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x), g(x)$ 的导函数都存在, 且 $f(x) > xf'(x) - x^2g'(x)$.

(1)若 $f(x) = x^2, g(x) = ax - \frac{1}{x}$, 求 a 的取值范围;

(2)证明: $g(\log_2 5) + f(\log_3 8) \cdot \log_3 3 > g(\log_3 8) + f(\log_2 5) \cdot \log_5 2$.

21. (12 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F, T 为圆 $S: (x+5)^2 + (y-3)^2 = 5$ 上一动点, 且 $|FT|$ 的最小值为 $2\sqrt{5}$.

(1)求 C 的方程;

(2) P 在 C 的准线上, 过 F 作直线 PF 的垂线交 C 于 A, B 两点, M, N 分别为线段 AP, BP 的中点, 试判断直线 MN 与 C 的位置关系, 并说明理由.

(二)选考题:共 10 分. 请考生从第 22,23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一个题目计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程](10 分)

在极坐标系中, 圆 C 的圆心在极轴上, 半径为 2, 且圆 C 经过极点.

(1)求圆 C 的极坐标方程;

(2)若 P 为圆 C 上的动点, 过 P 作直线 $\rho \sin \theta = -3, \rho \cos \theta = -1$ 的垂线, 垂足分别为 A, B , 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x) = |x-a| + |x-b| (-1 < a < b)$.

(1)若 $a=1, b=2$, 证明: $f(x) \geq \sin x$.

(2)记集合 $A = \{x | f(x) < a+b+2\}, B = \{x | |2x-a-b| < a+b+2\}$, 试判断 A 与 B 的关系, 并说明理由.