南京市 2022 届高三年级第二次（5 月）模拟考试

数学参考答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．A　2．D　3．B　4．C　5．B　6．C　7．D　8．B

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．BC　10．ABD　11．BCD　12．BD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．-1　14．$(-\frac{1}{2})^n$，答案不唯一，只要等比数列的公比满足 $-1<q<0$

15．$\sqrt{5}$　16．$\lg\frac{7}{6}$；5

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分 10 分）

解：（1）在△ABC 中，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$．

由 $\sqrt{3}a\sin C=c\cos A+c$，得 $\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin C\cos A+\sin C$．　……………………2 分

因为 $C\in(0,\ \pi)$，所以 $\sin C\neq 0$．

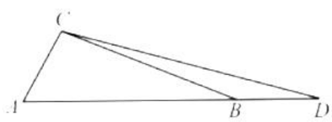
所以 $\sqrt{3}\sin A=\cos A+1$，即 $\sin(A-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}$．

因为 $A\in(0,\ \pi)$，所以 $A-\dfrac{\pi}{6}\in(-\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{6})$，所以 $A-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，

所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$．　……………………………………4 分

（2）在△ABC 中，$(\sqrt{7}b)^2=c^2+b^2-2bc\cos\dfrac{\pi}{3}$，即 $c^2-bc-6b^2=0$，

解得 $c=3b$ 或 $c=-2b$（舍去）．　……………………6 分



因为 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}$，所以 $AD=4b$，$BD=b$．

在$\triangle ACD$中，$CD^2=b^2+(4b)^2-2b\cdot 4b\cos\frac{\pi}{3}=13b^2$，

得$CD=\sqrt{13}b$. ……………………………………………………………………8分

因为$\frac{b}{\sin\angle ADC}=\frac{\sqrt{13}b}{\sin\frac{\pi}{3}}$，所以$\sin\angle ADC=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sqrt{13}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{39}}{26}$. ……………………10分

18．（本小题满分12分）

解：条件选①②

方法1

因为$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，所以$2\times\frac{S_2}{2}=S_1+\frac{S_3}{3}$，……………………………………2分

即$3(a_1+a_2)=3a_1+a_1+a_2+a_3$，化简得$2a_2=a_1+a_3$.

又因为$a_2=2$，所以$a_1+a_3=4$. ……………………………………………………4分

又因为$a_3=3a_1$，解得$a_1=1$. ……………………………………………………6分

因为$\frac{S_2}{2}-S_1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$，所以$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是首项为1，公差为$\frac{1}{2}$的等差数列，

所以$\frac{S_n}{n}=1+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}$，即$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$. ……………………………………8分

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n$. ……………………………………………………10分

又因为$a_1=1$满足$a_n=n$，

所以$a_n=n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

所以$a_{n+2}-a_n=n+2-n=2$.

综上，①②⇒③成立. ……………………………………………………………12分

方法2

因为$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，可设$\frac{S_n}{n}=an+b$，得$S_n=an^2+bn$. ……………………2分

所以$a_1=a+b$，$a_3=S_3-S_2=9a+3b-(4a+2b)=5a+b$.

因为$a_3=3a_1$，所以$a=b$.（i）……………………………………………………4分

又因为$a_2=S_2-S_1=4a+2b-(a+b)=3a+b=2$.（ii）……………………………6分

由(i)(ii)，得$a=b=\frac{1}{2}$，所以$S_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$. ……………………………………8分

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n$. ……………………………………………………10分

又因为 $a_1=1$ 满足 $a_n=n$，

所以 $a_n=n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

所以 $a_{n+2}-a_n=n+2-n=2$.

所以①②⇒③成立. ……………………12分

条件选①③

由 $a_{n+2}-a_n=2$，得 $a_3-a_1=2$.

又因为 $a_3=3a_1$，所以 $a_1=1$，$a_3=3$. ……………………4分

因为 $a_{n+2}-a_n=2$，所以数列$\{a_n\}$的奇数项是首项为1，公差为2的等差数列，偶数项是首项为2，公差为2的等差数列.

因此，当 n 为奇数时，$a_n=1+(\frac{n+1}{2}-1)\times 2=n$；……………………6分

当 n 为偶数时，$a_n=2+(\frac{n}{2}-1)\times 2=n$；所以 $a_n=n$，$n\in\mathbf{N}^*$. ……………………8分

所以 $a_{n+1}-a_n=n+1-n=1$，所以数列$\{a_n\}$是首项为1，公差为1的等差数列.

所以 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，从而 $\frac{S_n}{n}=\frac{n+1}{2}$. ……………………10分

因为 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{n+2}{2}-\frac{n+1}{2}=\frac{1}{2}$，所以$\{\frac{S_n}{n}\}$为等差数列.

所以①③⇒②成立. ……………………12分

条件选②③

方法1

因为 $a_{n+2}-a_n=2$，所以 $a_3-a_1=2$. (i) ……………………2分

因为$\{\frac{S_n}{n}\}$为等差数列，所以 $2\times\frac{S_2}{2}=S_1+\frac{S_3}{3}$. ……………………4分

即 $3(a_1+a_2)=3a_1+a_1+a_2+a_3$，化简得 $2a_2=a_1+a_3$. ……………………8分

又因为 $a_2=2$，所以 $a_1+a_3=4$. (ii) ……………………10分

由(i)(ii)，得 $a_1=1$，$a_3=3$，所以 $a_3=3a_1$.

所以②③⇒①成立. ……………………12分

方法2

因为 $a_{n+2}-a_n=2$，所以 $a_3-a_1=2$. (i) ……………………2分

因为$\{\frac{S_n}{n}\}$为等差数列，设 $\frac{S_n}{n}=an+b$，得 $S_n=an^2+bn$. ……………………4分

所以 $a_1=a+b$，$a_3=S_3-S_2=9a+3b-(4a+2b)=5a+b$，

所以 $a_3-a_1=4a$．(ii) ……………………………………………………6 分

由(i)(ii)，得 $a=\frac{1}{2}$． ……………………………………………………8 分

又 $a_2=S_2-S_1=4a+2b-(a+b)=3a+b=2$，所以 $b=\frac{1}{2}$． ……………………10 分

所以 $a_1=a+b=1$，$a_3=5a+b=3$，满足 $a_3=3a_1$．

所以②③⇒①成立． ……………………………………………………12 分

方法 3

因为 $\{\frac{S^n}{n}\}$ 为等差数列，所以设 $\frac{S^n}{n}=an+b$，得 $S_n=an^2+bn$． ……………………2 分

于是 $a_n=\begin{cases}S^1, & n=1,\\ S^n-S^{n-1}, & n\geqslant 2\end{cases}=\begin{cases}a+b, & n=1,\\ 2an-a+b, & n\geqslant 2\end{cases}=2an-a+b$． ……………………6 分

因为 $a_{n+2}-a_n=2$，所以 $4a=2$，得 $a=\frac{1}{2}$． ……………………………………8 分

又 $a_2=3a+b=2$，所以 $b=\frac{1}{2}$． ……………………………………………………10 分

从而 $a_1=a+b=1$，$a_3=5a+b=3$，所以 $a_3=3a_1$．

所以②③⇒①成立． ……………………………………………………12 分

19．(本小题满分 12 分)

解：(1) **方法 1**

在平行四边形 $ABCD$ 中，$AE\perp BC$，所以 $AE\perp PE$．

因为平面 PAE 与平面 $AECD$ 所成的角为 90°，即平面 $PAE\perp$ 平面 $AECD$． …………2 分

又因为平面 $PAE\cap$ 平面 $AECD=AE$，$PE\subset$ 平面 PAE，所以 $PE\perp$ 平面 $AECD$．

因为 $CD\subset$ 平面 $AECD$，所以 $PE\perp CD$． ……………………………………4 分

方法 2

在平行四边形 $ABCD$ 中，$AE\perp BC$，所以 $AE\perp PE$，$AE\perp CE$，

所以 $\angle PEC$ 为平面 PAE 与平面 $AECD$ 所成角的平面角．

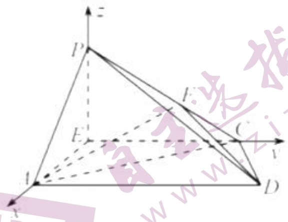
因为平面 PAE 与平面 $AECD$ 所成的角为 90°，所以 $\angle PEC=90^\circ$，即 $PE\perp CE$． ……2 分

又 $PE\perp AE$，$AE\cap CE=E$，$AE\subset$ 平面 $AECD$，$CE\subset$ 平面 $AECD$，所以 $PE\perp$ 平面 $AECD$．

因为 $CD\subset$ 平面 $AECD$，所以 $PE\perp CD$． ……………………………………4 分

（2）方法 1

由（1）得 $PE\perp$ 平面 $AECD$，$AE\perp EC$．



故以 $\{\overrightarrow{EA},\ \overrightarrow{EC},\ \overrightarrow{EP}\}$ 为正交基底，建立空间直角坐标系．

易得 $A(1,\ 0,\ 0)$，$C(0,\ 2\sqrt{3},\ 0)$，

$D(1,\ 3\sqrt{3},\ 0)$，$P(0,\ 0,\ \sqrt{3})$．

所以 $\overrightarrow{PC}=(0,\ 2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AP}=(-1,\ 0,\ \sqrt{3})$，

$\overrightarrow{AD}=(0,\ 3\sqrt{3},\ 0)$．……………………………………………………5 分

设 $\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PC}=(0,\ 2\sqrt{3}\lambda,\ -\sqrt{3}\lambda)$，$\lambda\in[0,\ 1]$．

则 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PF}=(-1,\ 2\sqrt{3}\lambda,\ \sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$．……………………………………6 分

设平面 FAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}=0.\end{cases}$ 即

$\begin{cases}y=0,\\ -x+2\sqrt{3}\lambda y+(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)z=0,\end{cases}$ 取 $z=1$，得 $x=\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda$．

则平面 FAD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,\ 0,\ 1)$．……………………………………8 分

又因为平面 $AECD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,\ 0,\ 1)$，

且二面角 $F-DA-C$ 的大小为 $30°$，

所以 $|\cos<\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)^2+1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

整理得 $9\lambda^2-18\lambda+8=0$，即 $(3\lambda-2)(3\lambda-4)=0$．

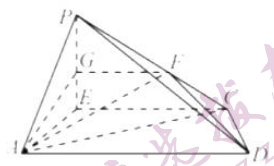
解得 $\lambda=\dfrac{2}{3}$ 或 $\lambda=\dfrac{4}{3}$（舍去），故 $\overrightarrow{PF}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{PC}$．……………………………………10 分

因为 $S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 1=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

所以 $V_{F-ACD}=\dfrac{1}{3}V_{P-ACD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ACD}\times\dfrac{1}{3}PE=\dfrac{1}{2}$．……………………………………12 分

方法 2

在△PEC中，过F作$FG\parallel EC$，交PE于点G.



因为$EC\parallel AD$，所以$FG\parallel AD$，因此A，D，F，G共面.

在平行四边形$ABCD$中，易知$AD\perp AE$.

由（1）得$PE\perp$平面$AECD$，

因为$AD\subset$平面$AECD$，所以$AD\perp PE$.

又$PE\cap AE=E$，AE，$PE\subset$平面PAE，所以$AD\perp$平面PAE.

因为$AG\subset$平面PAE，所以$AD\perp AG$.

所以$\angle GAE$为二面角$F-AD-C$的平面角，所以$\angle GAE=30^\circ$. ……………………8分

在Rt△AEG中，$\angle AEG=90^\circ$，$\angle GAE=30^\circ$，$AE=1$，所以$EG=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………………10分

因为$FG\parallel AD$，$FG\not\subset$平面$AECD$，$AD\subset$平面$AECD$，所以$FG\parallel$平面$AECD$.

因此$V_{F-ACD}=V_{G-ACD}=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times3\sqrt{3}\times1)\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{2}$. ……………………………………12分

20.（本小题满分12分）

解：（1）该场馆平均AQI的值为$\frac{1}{30}\times(25\times3+75\times6+125\times15+175\times6)$

$=\frac{25}{30}\times(1\times3+3\times6+5\times15+7\times6)=115$. ………………2分

（2）该场馆每天空气质量等级达到"优或良"的概率为$\frac{3+6}{30}=0.3$. ………………3分

设未来7天中空气质量等级达到"优或良"的天数为ξ，则$\xi\sim B(7,0.3)$. ……………4分

于是$P(\xi\geqslant2)=1-P(\xi=0)-P(\xi=1)$

$=1-(1-0.3)^7-C_7^1(1-0.3)^6\times0.3$

$=1-0.7^7-7\times0.7^6\times0.3=1-4\times0.7^7$

≈0.67.

所以未来7天中至少有两天空气质量等级达到"优或良"的概率为0.67. ……………6分

（3）设2套净化系统一年共需要更换的滤芯数量为Y，

则Y的可能取值为6，7，8，9，10. ……………………………………7分

因为2套净化系统相互独立，所以

$P(Y=9)=0.3\times0.5+0.5\times0.3=0.3$;

$P(Y=10)=0.5\times0.5=0.25$; ……………………………………9分

若促销期购买8个滤芯，

则一年更换滤芯所需费用的期望为 $8+0.3\times2+0.25\times4=9.6$(千元)；

若促销期购买 9 个滤芯，

则一年更换滤芯所需费用的期望为 $9+0.25\times2=9.5$(千元)；

若促销期购买不少于 10 个滤芯，

则一年更换滤芯所需的费用不低于 10（千元）.

因为 $10>9.6>9.5$，

所以每年在促销期购买 9 个滤芯最合理. ……………………12 分

21.（本小题满分 12 分）

解：（1）由 $f(x)=(x^2-x+1)e^x-3$，得 $f'(x)=(x^2+x)e^x$. ……………………2 分

令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=0$.

因为当 $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$，

$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,0)$. ……………………4 分

（2）$g(x)=xe^x-\dfrac{f(x)}{x}=(1-\dfrac{1}{x})e^x+\dfrac{3}{x}$，$x>0$.

所以 $g'(x)=\dfrac{1}{x^2}[(x^2-x+1)e^x-3]=\dfrac{f(x)}{x^2}$.

由（1）得 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增.

又因为 $f(1)=e-3<0$，$f(2)=3e^2-3>0$，且 $f(x)$ 的图象不间断，

所以存在唯一 $x_0\in(1,2)$，使得 $f(x_0)=0$.

即 $g'(x_0)=0$，即 $(x_0^2-x_0+1)e^{x_0}-3=0$　　(*). ……………………6 分

所以当 $x\in(0,x_0)$，$f(x)<0$，即 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$，$f(x)>0$，即 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 单调递增.

因此 $m=g(x)_{\min}=g(x_0)=\dfrac{(x_0-1)e^{x_0}+3}{x_0}$　(**). ……………………8 分

由(*)式得 $e^{x_0}=\dfrac{3}{x_0^2-x_0+1}$，代入(**)式得 $m=\dfrac{(x_0-1)+3}{x_0}=\dfrac{3}{x_0+\dfrac{1}{x_0}-1}$.

因为 $x_0\in(1,2)$，且函数 $y=\dfrac{3}{x+\dfrac{1}{x}-1}$ 在 $(1,2)$ 上递减，

所以 $m=\dfrac{3}{x_0+\dfrac{1}{x_0}-1}\in(2,3)$. ……………………………………………………………10 分

方法 1

由(*)式得 $(x_0-1)e^{x_0}=x_0^2e^{x_0}-3$，代入(**)式得 $m=\dfrac{(x_0-1)e^{x_0}+3}{x_0}=x_0e^{x_0}$.

因为 $x_0\in(1,2)$，且函数 $y=xe^x$ 在 $(1,2)$ 上递增，所以 $m=x_0e^{x_0}>e$. ……………………12 分

方法 2

因为 $x(e^x-1)\geq 0$，所以 $xe^x\geq x$，所以 $(x-1)e^{x-1}\geq x-1$，

所以 $(x-1)e^x\geq e(x-1)$（当且仅当 $x=1$ 时取等号）.

所以 $g(x)=(1-\dfrac{1}{x})e^x+\dfrac{3}{x}\geq\dfrac{ex-e+3}{x}>e$，所以 $m=g(x)_{\min}>e$.

综上，$e<m<3$ ……………………………………………………………………………12 分

22．（本小题满分 12 分）

解：（1）**方法 1**

由 $y=\dfrac{1}{4}x^2$，得 $y'=\dfrac{1}{2}x$，所以 A 处切线的斜率为 $\dfrac{1}{2}$. ……………………………………2 分

所以切线 PA 的方程为 $y-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}(x-1)$，即 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$.

联立方程组 $\begin{cases}y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4},\\y=x-5,\end{cases}$ 解得 $x=\dfrac{19}{2}$，$y=\dfrac{9}{2}$，即 $P(\dfrac{19}{2},\dfrac{9}{2})$. ………………………3 分

所以 $AP=\sqrt{1+\frac{1}{4}}\,|1-\dfrac{19}{2}|=\dfrac{17}{4}\sqrt{5}$. ……………………………………………………4 分

方法 2

设切线 PA 的方程为 $y-\dfrac{1}{4}=k(x-1)$，即 $y=kx-k+\dfrac{1}{4}$.

联立方程组 $\begin{cases}y=kx-k+\frac{1}{4},\\x^2=4y,\end{cases}$ 消元 y，得 $x^2-4kx+(4k-1)=0$.

由 $\triangle=16k^2-4(4k-1)=0$，解得 $k=\dfrac{1}{2}$.

所以切线 PA 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$. ……………………………………………………2 分

联立方程组$\begin{cases} y=x- ; \\ y=x-5. \end{cases}$ 解得 $x=\frac{19}{2}$，$y=\frac{9}{2}$，即 $P(\frac{19}{2},\ \frac{9}{2})$．……………………3 分

所以 $AP=\sqrt{1+}|1-\frac{19}{2}|=\frac{17}{4}\sqrt{5}$．……………………4 分

（2）设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$P(t,\ t-5)$，则 $y_1=\frac{1}{4}x_1^2$，$y_2=\frac{1}{4}x_2^2$．

由 $y=\frac{1}{4}x^2$，得 $y'=\frac{1}{2}x$，所以 A 处的切线方程为 $y-y_1=\frac{1}{2}x_1(x-x_1)$．

将 $P(t,\ t-5)$代入，得 $t-5-y_1=\frac{1}{2}x_1(t-x_1)$，即 $x_1^2-2tx_1+4(t-5)=0$．……………6 分

同理可得 $x_2^2-2tx_2+4(t-5)=0$．

所以 x_1，x_2 是方程 $x^2-2tx+4(t-5)=0$ 的两个解．

故 $x_1+x_2=2t$ ①，$x_1x_2=4(t-5)$ ②．……………………7 分

所以直线 AB 的斜率 $k=\frac{y^1-y^2}{x^1-x^2}=\frac{x^1+x^2}{4}=\frac{1}{2}t$．

由 $AB=2AP$，得 $\sqrt{1+t^2}|x_1-x_2|=2\sqrt{1+x^{12}}|x_1-t|$，……………………9 分

由①得 $|x_1-x_2|=2|x_1-t|$，所以 $\sqrt{1+t^2}=\sqrt{1+x^{12}}$，化简得 $x_1^2=t^2$．

因为 $x_1\neq t$，所以 $x_1=-t$ ③．……………………11 分

由①②③，得 $3t^2+4t-20=0$，解得 $t_1=2$，$t_2=-\frac{10}{3}$．

所以，点 P 的坐标为$(2,\ -3)$或$(-\frac{10}{3},\ -\frac{25}{3})$．……………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。