2023届高三开学摸底联考 全国卷
文科数学试卷

注意事项:

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为120分钟,满分150分

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{x|0<x\leqslant 3\}$, $B=\{0,1,2,3,4,5\}$,则 $(\complement_R A)\cap B=$

A.$\{4,5\}$　　B.$\{0,4,5\}$　　C.$\{3,4,5\}$　　D.$\{0,3,4,5\}$

2.命题"$\exists x_0>0, -x_0^2+2x_0-1>0$"的否定为

A.$\exists x_0>0, -x_0^2+2x_0-1\leqslant 0$　　B.$\exists x_0\leqslant 0, -x_0^2+2x_0-1>0$

C.$\forall x>0, -x^2+2x-1\leqslant 0$　　D.$\forall x\leqslant 0, -x^2+2x-1>0$

3.若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\leqslant 0,\\x-y+1\geqslant 0,\\y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的最小值为

A.1　　B.2　　C.$\frac{5}{2}$　　D.$-\frac{5}{2}$

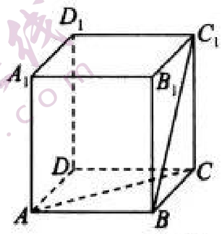
4.已知点 $P(4,3)$ 是角 α 的终边上一点,则 $\sin 2\alpha=$

A.$\frac{24}{25}$　　B.$\frac{12}{25}$　　C.$-\frac{24}{25}$　　D.$-\frac{12}{25}$

5.已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$, $\boldsymbol{b}=(x-1,x)(x>1)$,且 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$,若 $(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$,则实数 m 的值为

A.0　　B.-1　　C.$\frac{4}{5}$　　D.$\frac{5}{4}$

6.如图,长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=2$,若直线 BC_1 与直线 AC 所成的角为60°,则该长方体的表面积为



A.48　　B.32　　C.24　　D.12

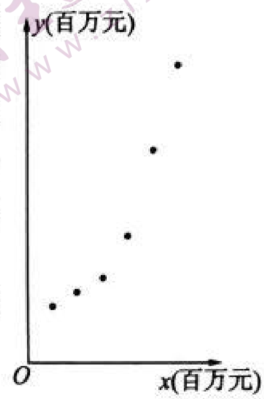
7.若直线 $l: kx-y+2-k=0$ 与圆 $C: x^2+y^2-4x-2y-4=0$ 交于 A,B 两点,则当 $\triangle ABC$ 周长最小时, $k=$

A.$\frac{1}{2}$　　B.$-\frac{1}{2}$　　C.1　　D.-1

8.将函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$，再向左平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，若对任意的 $x\in\mathbf{R}$，均有 $g(x)\leqslant g\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 成立，则 φ 的最小值为

A. $\frac{\pi}{24}$　　B. $\frac{\pi}{12}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

9.某企业秉承"科学技术是第一生产力"的发展理念，投入大量科研经费进行技术革新，该企业统计了最近6年投入的年科研经费 x（单位：百万元）和年利润 y（单位：百万元）的数据，并绘制成如图所示的散点图.已知 x,y 的平均值分别为 $\bar{x}=7,\bar{y}=10$.甲统计员得到的回归方程为 $\hat{y}=1.69x+\hat{a}$；乙统计员得到的回归方程为 $\hat{y}=2.52e^{0.17x}$；若甲、乙二人计算均未出现错误，有下列四个结论：



①当投入年科研经费为20（百万元）时，按乙统计员的回归方程可得年利润估计值为75.6（百万元）（取 $e^{3.4}=30$）；

② $\hat{a}=-1.83$；

③方程 $\hat{y}=1.69x+\hat{a}$ 比方程 $\hat{y}=2.52e^{0.17x}$ 拟合效果好；

④ y 与 x 正相关.

以上说法正确的是

A.①③④　　B.②③　　C.②④　　D.①②④

10.已知 $a=\frac{\ln 5}{10},b=\frac{1}{2e},c=\frac{\ln 3}{6}$，则

A. $b>c>a$　　B. $c>b>a$　　C. $a>c>b$　　D. $b>a>c$

11.已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_{11}>S_{10}>S_{12}$，则满足 $S_n>0$ 的正整数 n 的最大值为

A.11　　B.12　　C.21　　D.22

12.已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数 $f(x)$ 的图象是连续不间断的曲线，且 $f(x+2)+f(x)=f(1)$，对任意的 $x_1,x_2\in[-2,0]$，$x_1\neq x_2$，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 恒成立，则 $f(x)$ 在区间 $[-100,100]$ 上的零点个数为

A.100　　B.102　　C.200　　D.202

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13.若 $z=\frac{1-ai}{2+i}$（i为虚数单位）为纯虚数，则实数 a 的值为________.

14.已知函数 $f(x)$ 满足：①对 $\forall m,n>0$，$f(m)+f(n)=f(mn)$；② $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$.请写出一个符合上述条件的函数 $f(x)=$________.

15.已知倾斜角为60°的直线 l 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F，且与 C 交于 A,B 两点（点 A 在第一象限），若 $|AF|=3$，则 $|BF|=$________.

16.已知△ABC的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $(b+c)^2=a^2+3bc$，且 $\sqrt{2}a+b=2c$，则 $\angle C=$________.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17～21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:60 分.

17.(12 分)在①$a_{n+1}=2a_n+1$;②$S_n=2^{n+1}-n+2$;③$S_n=2a_n-n+4$ 三个条件中任选一个,补充到下面问题的横线处,并解答.

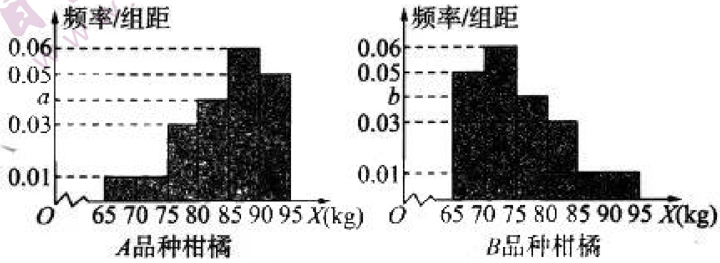
已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $a_1=1$,________.

(1)求 a_n;

(2)设 $b_n=na_n$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

注:如果选择多个条件解答,按第一个解答计分.

18.(12 分)在实施"乡村振兴"的进程中,某地政府引领广大农户发展特色农业,种植优良品种柑橘.现在实验基地中种植了相同数量的 A,B 两种柑橘.为了比较 A,B 两个柑橘品种的优劣,在柑橘成熟后随机选取 A、B 两种柑橘各 100 株,并根据株产量 X(单位:kg)绘制了如图所示的频率分布直方图(数据分组为:[65,70),[70,75),[75,80),[80,85),[85,90),[90,95]):



(1)求 a,b 的值;

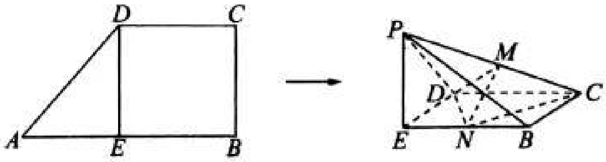
(2)将频率当做概率,在所有柑橘中随机抽取一株,求其株产量不低于 80 kg 的概率;

(3)求两种柑橘株产量平均数的估计值(同一组数据中的平均数用该组区间的中点值代表),并从产量角度分析,哪个品种的柑橘更好?说明理由.

19.(12 分)如图,梯形 $ABCD$ 中,$AB // CD$,$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$,$BC=CD=2$,$AD=\sqrt{5}$,$DE\perp AB$,垂足为点 E.将$\triangle AED$ 沿 DE 折起,使得点 A 到点 P 的位置,且 $PE\perp EB$,连接 PB,PC,M,N 分别为 PC 和 EB 的中点.

(1)证明:$MN //$ 平面 PED;

(2)求点 C 到平面 DNM 的距离.



20.(12分)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$，且经过点 $E(\sqrt{6},\sqrt{15})$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)若过点 $M(3,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 P,Q 两点，点 P 关于 x 轴的对称点为点 N，求 $\triangle MNQ$ 面积的最大值.

21.(12分)已知函数 $f(x)=a\ln x-ax(a\neq0)$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)设 $g(x)=e^x-ax-a$，证明：当 $a\in(0,e]$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$.

(二)选考题：共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.[选修4—4：坐标系与参数方程](10分)

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数，$0\leqslant\alpha<\pi$).以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-2\sqrt{2}\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-7=0$.

(1)求曲线 C 的直角坐标方程；

(2)若直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点，当 $|AB|=\sqrt{34}$ 时，求直线 l 的普通方程.

23.[选修4—5：不等式选讲](10分)

已知 $f(x)=|x+1|,g(x)=|a-x|$.

(1)当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)-g(x)\leqslant1$ 的解集；

(2)若 $f(x)-g(x)\leqslant2$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

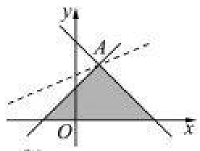
2023届高三开学摸底联考　全国卷

文科数学参考答案及评分意见

1.B 【解析】$\complement_R A=\{x|x\leqslant 0$ 或 $x>3\}$，所以 $(\complement_R A)\cap B=\{0,4,5\}$.故选 B.

2.C 【解析】由特称命题的否定为全称命题得，该命题的否定为"$\forall x>0,-x^2+2x-1\leqslant 0$".故选 C.

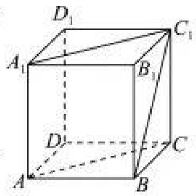
3.D 【解析】可行域如图所示，当直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}z$ 过点 $A\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ 时，z 取得最小值 $-\frac{5}{2}$.故选 D.



4.A 【解析】$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{24}{25}$.故选 A.

5.D 【解析】$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}=\sqrt{(x-1)^2+x^2}$，得 $x=-1$(舍)或 $x=2$，所以 $\boldsymbol{b}=(1,2)$，$m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2m-1,m-2)$，$(m\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=4m-5=0$，解得 $m=\frac{5}{4}$.故选 D.

6.C 【解析】连接 A_1C_1，A_1B，AB_1，易知 $A_1B=BC_1$，又 $AC\parallel A_1C_1$，所以 $\angle A_1C_1B$ 即为直线 BC_1 与直线 AC 所成的角，所以 $\angle A_1C_1B=60^\circ$，所以 $A_1B=BC_1=A_1C_1=2\sqrt{2}$，设 $AA_1=a$，$AB_1=\sqrt{4+a^2}=2\sqrt{2}$，解得 $a=2$，所以该长方体是棱长为2的正方体，其表面积为 $6\times2\times2=24$.故选 C.



7.C 【解析】直线 l 恒过点 $D(1,2)$，易知点 D 在圆内，当 $CD\perp l$ 时，$|AB|$ 最小，$\triangle ABC$ 周长最小，由 $C(2,1)$，$D(1,2)$ 易得 $k_{CD}=-1$，所以 $k=1$.故选 C.

8.B 【解析】$g(x)=\sin\left(2x+2\varphi+\frac{\pi}{3}\right)$，因为 $g(x)\leqslant g\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 恒成立，所以 $g(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{12}$ 处取得最大值，故 $2\varphi+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$，因为 $\varphi>0$，当 $k=0$ 时，φ 取得最小值 $\frac{\pi}{12}$.故选 B.

9.D 【解析】将 $x=20$ 代入 $\hat{y}=2.52e^{0.17x}$，得 $\hat{y}=75.6$，①正确；将 $\bar{x}=7$，$\bar{y}$ [illegible] 代入 $\hat{y}=1.69x+\hat{a}$ 得 $\hat{a}=-1.8$[illegible]，②正确；由散点图可知，回归方程 $\hat{y}=2.52e^{0.17x}$ 比 $\hat{y}=1.69x+\hat{a}$ 的拟合效果更好，③错误；因为 y 随 x 的增大而增大，所以 y 与 x 正相关，④正确.故①②④正确.故选 D.

10.A 【解析】令 $f(x)=\frac{\ln x}{2x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{2x^2}$，易得 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，$a=f(5)$，$b=f(e)$，$c=f(3)$，因为 $e<3<5$，所以 $b>c>a$.故选 A.

11.C 【解析】由题可得 $\begin{cases}a_{11}>0,\\a_{12}<0,\\a_{11}+a_{12}<0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a_1+a_{21}=2a_{11}>0,\\a_1+a_{23}=2a_{12}<0,\\a_1+a_{22}=a_{11}+a_{12}<0,\end{cases}$ 故 $\begin{cases}S_{21}>0,\\S_{23}<0,\\S_{22}<0,\end{cases}$

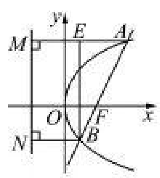
所以满足 $S_n>0$ 的正整数 n 的最大值为21.故选 C.

12.A 【解析】令 $x=-1$，得 $f(1)+f(-1)=f(1)$，即 $f(-1)=0$，又 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上单调递增，因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(1)=0$，$f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，$f(x+2)+f(x)=f(1)=0$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是以4为周期的函数，$f(x)$ 在一个周期内有两个零点，故 $f(x)$ 在区间 $[-100,100]$ 上的零点个数为 $50\times2=100$.故选 A.

13.2 【解析】$z=\frac{(1-ai)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-a}{5}+\frac{-2a-1}{5}i$ 为纯虚数，所以 $\frac{2-a}{5}=0$，$a=2$.

14.$\log_2 x$ 【解析】答案不唯一，符合条件即可.

15.1 【解析】如图，分别过点 A，B 作准线的垂线，垂足为 M，N，过点 B 作 AM 的垂线，垂足为 E，设 $|BF|=x$，易得 $\angle ABE=30^\circ$，则 $|AE|=\frac{1}{2}(3+x)$，由抛物线的性质可得 $|AM|=|AF|$，$|BN|=|BF|$，可得 $x+\frac{1}{2}(3+x)=3$，解得 $x=1$，故 $|BF|=1$.



16. $\frac{5}{12}\pi$ 【解析】由 $(b+c)^2=a^2+3bc$ 得 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，即 $\cos A=\frac{1}{2}$，故 $A=\frac{\pi}{3}$，由 $\sqrt{2}a+b=2c$ 得 $\sqrt{2}\sin A+\sin B=2\sin C$，即 $\sqrt{2}\sin A=2\sin C-\sin B$，即 $\frac{\sqrt{6}}{2}=2\sin C-\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)$，整理得 $\sin\left(C-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$ 或 $C-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}$，又 $0<C<\frac{2\pi}{3}$，故 $C-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$，即 $C=\frac{5}{12}\pi$.

17.【解】(1)选①，由 $a_{n+1}=2a_n+1$ 得 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，…… 2分

所以数列 $\{a_n+1\}$ 是以 $a_1+1=2$ 为首项，2 为公比的等比数列，

$a_n+1=2\times2^{n-1}=2^n$，…… 4分

所以 $a_n=2^n-1$. …… 5分

选②，由 $S_n=2^{n+1}-n-2$ 得 $S_{n-1}=2^n-n-1(n\geqslant2)$，…… 2分

作差得 $a_n=2^n-1(n\geqslant2)$，…… 4分

$a_1=1$ 符合上式，所以 $a_n=2^n-1$. …… 5分

选③，由 $S_n=2a_n-n$ 得 $S_{n-1}=2a_{n-1}-n+1(n\geqslant2)$，…… 2分

作差得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}-1$，即 $a_n=2a_{n-1}+1$，

即 $a_{n+1}=2a_n+1$，即 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，…… 4分

所以数列 $\{a_n+1\}$ 是以 $a_1+1=2$ 为首项，2 为公比的等比数列，

$a_n+1=2\times2^{n-1}=2^n$，所以 $a_n=2^n-1$. …… 5分

(2) $b_n=na_n=n\times2^n-n$，

所以 $T_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n-(1+2+3+\cdots+n)$. …… 7分

设 $E_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$，$F_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，…… 9分

$E_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$，

$2E_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+n\times2^{n+1}$，

作差得 $-E_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\times2^{n+1}=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\times2^{n+1}$，

化简得 $E_n=(n-1)\times2^{n+1}+2$，…… 11分

所以 $T_n=E_n-F_n=(n-1)\times2^{n+1}-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+2$. …… 12分

18.【解】(1) $(0.01\times2+0.03+a+0.05+0.06)\times5=1$，解得 $a=0.04$， …… 2分

$(0.01\times2+0.03+b+0.05+0.06)\times5=1$，解得 $b=0.04$. …… 4分

(2) A 品种柑橘株产量不低于 80 kg 的频率为 $(0.04+0.05+0.06)\times5=0.75$， …… 5分

B 品种柑橘株产量不低于 80 kg 的频率为 $(0.03+0.01+0.01)\times5=0.25$， …… 6分

故 200 株柑橘中产量不低于 80 kg 的频率为 $\frac{0.75\times100+0.25\times100}{100+100}=0.5$， …… 7分

所以在所有柑橘中随机抽取一株，其株产量不低于 80 kg 的概率为 0.5. …… 8分

(3)设 A 品种柑橘株产量平均数的估计值为 M_A：

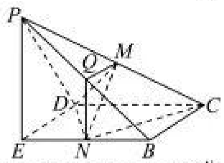
$M_A=(0.01\times67.5+0.01\times72.5+0.03\times77.5+0.04\times82.5+0.05\times92.5+0.06\times87.5)\times5=84.5$， …… 9分

设 B 品种柑橘株产量平均数的估计值为 M_B：

$M_B=(0.01\times92.5+0.01\times87.5+0.03\times82.5+0.04\times77.5+0.05\times67.5+0.06\times72.5)\times5=75.5$， …… 10分

A 品种的柑橘更好.理由如下：方法一：A 的平均产量大于 B 的平均产量.方法二：由频率分布直方图可知，A 品种柑橘株产量在 80 kg 及以上的占比为 75%，B 品种柑橘株产量在 80 kg 及以上的占比为 25%，故 A 品种的柑橘更好.(注：答案不唯一，有道理的答案均给分). …… 12分

19.【解】(1)如图，取 PB 中点 Q，连接 MQ，NQ，因为 M，Q 分别为 PC 和 PB 的中点，故 $MQ\parallel BC\parallel DE$.



又 $DE\subset$ 平面 PED，$MQ\not\subset$ 平面 PED，所以 $MQ\parallel$ 平面 PED. …… 2分

同理 $NQ\parallel$ 平面 PED.

又 $MQ\cap NQ=Q$，$MQ\subset$ 平面 MNQ，$NQ\subset$ 平面 MNQ，

所以平面 $MNQ\parallel$ 平面 PED. …… 4分

因为 $MN\subset$ 平面 MNQ，所以 $MN\parallel$ 平面 PED. …… 5分

(2)$S_{\triangle CDN}=\frac{1}{2}CD\times BC=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$.

点 M 到平面 CDN 的距离为 $\frac{1}{2}PE=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}\sqrt{AD^2-DE^2}=\frac{1}{2}$,

所以 $V_{M-CDN}=\frac{1}{3}\times 2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$. …………………………………………………… 6 分

因为 $PE\perp DE$,$PE\perp EB$,$BE\cap DE=E$,BE,$DE\subset$ 平面 $BCDE$,所以 $PE\perp$ 平面 $BCDE$,又 $CD\subset$ 平面 $BCDE$,故 $CD\perp PE$,又因为 $CD\perp ED$,$PE\cap DE=E$,PE,$DE\subset$ 平面 PED,所以 $CD\perp$ 平面 PED,故 $CD\perp PD$,

所以 $DM=\frac{1}{2}PC=\frac{3}{2}$.

又 $DN=\sqrt{5}$,$MQ\parallel BC$,$MQ=\frac{1}{2}BC=1$,$NQ\parallel PE$,$NQ=\frac{1}{2}PE=\frac{1}{2}$,$PE\perp BC$,

故 $MN=\sqrt{MQ^2+NQ^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. …………………………………………………… 8 分

所以 $\cos\angle DNM=\frac{DN^2+MN^2-DM^2}{2\times DN\times MN}=\frac{4}{5}$,$\sin\angle DNM=\frac{3}{5}$.

所以 $S_{\triangle DNM}=\frac{1}{2}DN\times MN\times\sin\angle DNM=\frac{3}{4}$. …………………………………………………… 10 分

又 $V_{M-CDN}=V_{C-DNM}$,设点 C 到平面 DNM 的距离为 d,

则 $\frac{1}{3}\times S_{\triangle DMN}\times d=\frac{1}{3}$,即 $\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times d=\frac{1}{3}$,得 $d=\frac{4}{3}$,

所以点 C 到平面 DNM 的距离为 $\frac{4}{3}$. …………………………………………………… 12 分

20.【解】(1)设椭圆 C 的焦距为 $2c$,则 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{6}$,即 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{1}{6}$,

所以 $1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{6}$,即 $a^2=\frac{6}{5}b^2$……①. …………………………………………………… 2 分

又椭圆 C 经过点 $E(\sqrt{6},\sqrt{15})$,则 $\frac{6}{a^2}+\frac{15}{b^2}=1$……②, …………………………………………………… 4 分

由①②解得 $a^2=24$,$b^2=20$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{20}=1$. …………………………………………………… 5 分

(2)当直线 l 垂直于坐标轴时,点 M,N,Q 不能构成三角形,不符合题意,

当直线 l 不垂直于坐标轴时,设 $l:x=my+3$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,则 $N(x_1,-y_1)$,

联立 $\begin{cases}x=my+3,\\ \frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{20}=1,\end{cases}$ 得 $(5m^2+6)y^2+30my-75=0$, …………………………………………………… 7 分

则 $y_1+y_2=-\frac{30m}{5m^2+6}$,$y_1y_2=-\frac{75}{5m^2+6}$.

又 $S_{\triangle PQN}=\frac{1}{2}\times|2y_1|\times|x_2-x_1|$,$S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}\times|2y_1|\times|3-x_1|$, …………………………………………………… 9 分

易知 x_2-x_1 与 $3-x_1$ 同号,

所以 $S_{\triangle MNQ}=S_{\triangle PQN}-S_{\triangle PMN}=|y_1|\times(|x_2-x_1|-|3-x_1|)=|y_1|\times|(x_2-x_1)-(3-x_1)|$

$=|y_1|\times|x_2-3|=|y_1|\times|my_2|=|my_1y_2|$

$=\frac{75|m|}{5m^2+6}=\frac{75}{5|m|+\frac{6}{|m|}}\leqslant\frac{75}{2\sqrt{5|m|\times\frac{6}{|m|}}}=\frac{5\sqrt{30}}{4}$, …………………………………………………… 11 分

当且仅当 $5|m|=\frac{6}{|m|}$,即 $m=\pm\frac{\sqrt{30}}{5}$ 时等号成立,

所以 $\triangle MNQ$ 面积的最大值为 $\frac{5\sqrt{30}}{4}$. …………………………………………………… 12 分

21.【解】(1)$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,$f'(x)=\frac{a}{x}-a=\frac{a(1-x)}{x}$.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$，令 $f'(x)<0$，得 $x>1$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减； …… 2 分

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x>1$，令 $f'(x)<0$，得，$0<x<1$，

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减. …… 4 分

综上，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减. …… 5 分

(2)证明：当 $a\in(0,e]$ 时，要证 $f(x)\leqslant g(x)$，只需证 $g(x)-f(x)\geqslant 0$，即证 $e^x-a\ln x-a\geqslant 0$，即证 $\frac{1}{a}e^x-\ln x-1\geqslant 0$.

因为 $a\in(0,e]$，所以 $\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{e}$， …… 6 分

所以 $\frac{1}{a}e^x-\ln x-1\geqslant\frac{1}{e}e^x-\ln x-1$.

设 $h(x)=\frac{1}{e}e^x-\ln x-1$，则 $h'(x)=\frac{1}{e}e^x-\frac{1}{x}$. …… 8 分

易得 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $h'(1)=0$，

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增， …… 10 分

故 $h(x)\geqslant h(1)=0$，

所以当 $a\in(0,e]$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$. …… 12 分

22.【解】(1)由 $\rho^2-2\sqrt{2}\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-7=0$ 得 $\rho^2-2\rho\sin\theta-2\rho\cos\theta-7=0$， …… 2 分

即 $x^2+y^2-2x-2y-7=0$，

即 $(x-1)^2+(y-1)^2=9$. …… 4 分

(2)将 $\begin{cases}x=2+t\cos\alpha,\\y=1+t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数，[illegible])代入 $(x-1)^2+(y-1)^2=9$，

整理得 $t^2+2t\cos\alpha-8=0$.

设 A，B 所对应的参数分别为 t_1，t_2，

则 $t_1+t_2=-2\cos\alpha$，$t_1t_2=-8$， …… 6 分

所以 $|AB|=|t_2-t_1|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{4\cos^2\alpha+32}=\sqrt{34}$， …… 8 分

解得 $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 或 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$，

故直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)或 $\begin{cases}x=2-\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\y=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)，

所以直线 l 的直角坐标方程为 $x-y-1=0$ 或 $x+y-3=0$. …… 10 分

23.【解】(1)由题，当 $a=1$ 时，$f(x)-g(x)\leqslant 1\Leftrightarrow|x+1|-|1-x|\leqslant 1$， …… 1 分

即 $\begin{cases}-2\leqslant 1,x\leqslant -1,\\2x\leqslant 1,-1<x<1,\\2\leqslant 1,x\geqslant 1,\end{cases}$ …… 3 分

解得 $x\leqslant\frac{1}{2}$， …… 4 分

所以不等式的解集为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

(2) $f(x)-g(x)=|x+1|-|a-x|$

$\leqslant|(x+1)+(a-x)|$（当且仅当 $x+1$ 和 $a-x$ 异号时等号成立），

即 $[f(x)-g(x)]_{max}=|a+1|$. …… 6 分

若 $f(x)-g(x)\leqslant 2$ 恒成立，只需 $|a+1|\leqslant 2$， …… 8 分

解得 $-3\leqslant a\leqslant 1$，

所以实数 a 的取值范围为 $[-3,1]$. …… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。