高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\left\{x\left|\frac{x-2}{x+1}>0\right.\right\}$，$B=\{x|\log_3 x\leqslant 1\}$，则 $A\cap B=$

A. $(-\infty,-1)\cup(2,3]$　　B. $(2,3]$

C. $(0,2)$　　D. $(-\infty,2)$

2. 已知复数 z 满足 $z+2i=1-zi$（i 是虚数单位），则 $|z|=$

A. $\frac{9}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

3. 已知 $P(1,7)$ 是角 α 的终边上一点，则 $\sin(\pi-2\alpha)=$

A. $-\frac{7}{25}$　　B. $-\frac{24}{25}$　　C. $\frac{7}{25}$　　D. $\frac{24}{25}$

4. 若 $a,b\in\mathbf{R}$，则"$\frac{a}{b}>1$"是"$a>b$"的

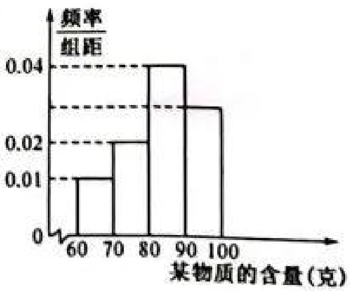
A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 某企业对其生产的一批产品进行检测，得出每件产品中某种物质含量（单位：克）的频率分布直方图如图所示，则该物质含量的众数和平均数的估计值分别为



A. 83 和 84

B. 83 和 85

C. 85 和 84

D. 85 和 85

6. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,G 分别为 A_1D_1,C_1D_1 的中点，则直线 A_1G,CE 所成角的余弦值为

A. $\frac{\sqrt{30}}{10}$　　B. $\frac{\sqrt{30}}{15}$　　C. $\frac{4\sqrt{5}}{15}$　　D. $\frac{\sqrt{145}}{15}$

7. 七辆汽车排成一纵队，要求甲车、乙车、丙车均不排队头或队尾且各不相邻，则排法有

A. 48 种　　B. 72 种　　C. 90 种　　D. 144 种

8. 已知 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $a_{n+1}=2a_n-2,S_2=10$，则$\{a_n\}$的通项公式为

A. $a_n=2^n+2$　　B. $a_n=3^n-4$

C. $a_n=n^2+n$　　D. $a_n=3n^2-1$

9. 已知函数 $f(x)=\sin x(\cos x-\sin x)$，则下列说法正确的为

A. $f(x)$的最小正周期为 2π

B. $f(x)$的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $f(x)$的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{8}$对称

D. 将 $f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度，再向上平移$\frac{1}{2}$个单位长度后所得图象对应的函数为奇函数

10. 在$\triangle ABC$ 中，$AB=1,AC=2,\angle BAC=60°$，P 是$\triangle ABC$ 外接圆上的一点，若$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，则 $m+n$ 的最小值是

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{6}$

11. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点为 F，O 为坐标原点，P 为双曲线 C 的右支上一点，若 $|OP|=\sqrt{3}a$，$|PF|=3b$，则双曲线 C 的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

12. 已知实数 a,b,c 满足 $ac=b^2$，且 $a+b+c=\ln(a+b)$，则

A. $c<a<b$　　B. $c<b<a$

C. $a<c<b$　　D. $b<c<a$

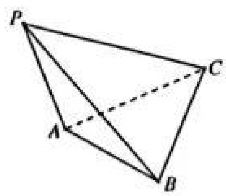
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若函数 $f(x)=x[\log_3(3^x+1)+ax]$为奇函数，则实数 $a=$________.

14. 已知 $f(x)$为 **R** 上单调递增的奇函数，在数列$\{a_n\}$中，$a_1=20$，对任意正整数 n，$f(a_{n+1})+f(3-a_n)=0$，则数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 的最大值为________.

15. 已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$的焦点为 F，过 F 的直线交 C 于点 A,B，交 C 的准线于点 E，若$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{FA}$，$|BF|=2$，则 $p=$________.

16. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=AB=AC=1$，$\angle PAB=\angle PAC=120°$，$AB\perp AC$，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为________.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$\tan B=\dfrac{\cos C-2\cos A}{\sin C}$，$a<b$.

(1)求角 B；

(2)若 $a=3$，$b=7$，D 为 AC 边的中点，求△BCD 的面积.

18.（本小题满分 12 分）

经过全国上下的共同努力，我国的新冠疫情得到很好的控制，但世界上其他一些国家的疫情并没有得到有效控制，疫情防控形势仍然比较严峻，为扎紧疫情防控的篱笆，提高疫情防控意识，某市宣传部门开展了线上新冠肺炎世界防控现状及防控知识竞赛，现从全市的参与者中随机抽取了 1 000 名幸运者的成绩进行分析，他们的得分(满分 100 分)情况如下表：

得分	[30,40]	(40,50]	(50,60]	(60,70]	(70,80]	(80,90]	(90,100]
频数	25	150	200	250	225	100	50

(1)若此次知识竞赛得分 X 整体服从正态分布，用样本来估计总体，设 μ，σ 分别为抽取的1 000 名幸运者得分的平均值和标准差(同一组数据用该区间中点值代替)，求 μ，σ 的值；(结果保留整数)

(2)在(1)的条件下，为感谢市民的积极参与，对参与者制定如下奖励方案：得分不超过 79 分的可获得 1 次抽奖机会，得分超过 79 分的可获得 2 次抽奖机会. 假定每次抽奖，抽到10 元红包的概率为$\dfrac{3}{5}$，抽到 20 元红包的概率为$\dfrac{2}{5}$. 已知胡老师是这次活动中的参与者，估算胡老师在此次活动中所获得红包的数学期望.(结果保留整数)

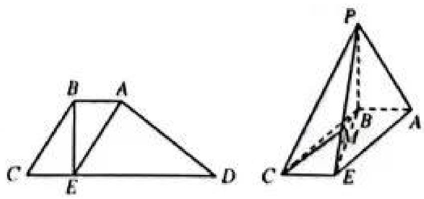
参考数据：$P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=0.6826$；$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=0.9544$；$P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)=0.9974$，$\sqrt{2.1}\approx1.449$.

19.（本小题满分 12 分）

如图，四边形 ABCD 为梯形，$AB/\!/CD$，$\angle C=60°$，$CD=2CB=4AB=4$，点 E 在线段 CD 上，且 $BE\perp CD$. 现将△ADE 沿 AE 翻折到△PAE 的位置，使得 $PC=\sqrt{10}$.

(1)证明：$AE\perp PB$；

(2)点 M 是线段 PE 上的一点(不包含端点)，是否存在点 M，使得二面角 P - BC - M 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$？若存在，则求出$\dfrac{ME}{PE}$；若不存在，请说明理由.



20.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=a\ln(x+1)-3x$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)证明:当 $a=1$ 时,方程 $f(x)=\sin x-3x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 上有且仅有一个实数解.

21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$,椭圆 C 的左、右顶点分别为 A,B,上顶点为 D,$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=-1$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)斜率为 $\frac{1}{2}$ 的动直线 l 与椭圆 C 相交于 M,N 两点,是否存在定点 P(直线 l 不经过点 P),使得直线 PM 与直线 PN 的倾斜角互补?若存在这样的点 P,请求出点 P 的坐标;若不存在,请说明理由.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-2+\frac{3\sqrt{10}}{10}t,\\ y=\frac{\sqrt{10}}{10}t\end{cases}$ (t 为参数),以 O 为极点,x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$,直线 l 与曲线 C 交于不同的两点 A,B.

(1)求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程;

(2)若点 P 为直线 l 与 x 轴的交点,求 $\frac{1}{|PA|^2}+\frac{1}{|PB|^2}$.

23.(本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x-2m|-|3x+m|(m>0)$.

(1)当 $m=3$ 时,求不等式 $f(x)\geq 2$ 的解集;

(2)对于任意实数 x,t,不等式 $f(x)<|4+t|+|t-3|$ 恒成立,求实数 m 的取值范围.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. B　由题意知，$A=\left\{x\left|\frac{x-2}{x+1}>0\right.\right\}=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$，$B=\{x\,|\,\log_3 x\leqslant 1\}=(0,3]$，所以 $A\cap B=(2,3]$. 故选 B.

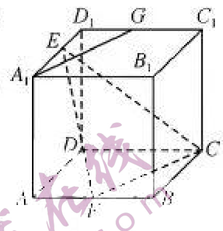
2. B　由题意可得：$z+zi=1-2i$，则 $z=\frac{1-2i}{1+i}=\frac{(1-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$，所以 $|z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 故选 B.

3. C　由 $\sin\alpha=\frac{7}{\sqrt{1^2+7^2}}=\frac{7}{5\sqrt{2}}$，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+7^2}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}$，所以 $\sin(\pi-2\alpha)=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{7}{5\sqrt{2}}\times\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{7}{25}$. 故选 C.

4. D　若 $\frac{a}{b}>1$，当 $b>0$ 时，$a>b$，当 $b<0$ 时，$a<b$；又当 $a>b>0$ 时，两边除以 b，得 $\frac{a}{b}>1$，当 $a>b$ 且 $b<0$ 时，两边除以 b，得 $\frac{a}{b}<1$. 故"$\frac{a}{b}>1$"是"$a>b$"的既不充分也不必要条件. 故选 D.

5. C　根据频率分布直方图得出众数落在第三组[80,90)内，所以众数为 $\frac{80+90}{2}=85$. 含量在[60,70)之间的频率为 0.1；含量在[70,80)之间的频率为 0.2；含量在[80,90)之间的频率为 0.4，根据概率和为 1，可得含量在[90,100)之间的频率为 0.3，所以频率分布直方图的平均数为 $65\times0.1+75\times0.2+85\times0.4+95\times0.3=84$. 故选 C.

6. C　如图所示，取 AB 的中点 F，连接 EF，CF，易知 $A_1G\parallel CF$，则 $\angle ECF$ 为直线 A_1G 与 CB 所成角或其补角. 不妨设 $AB=2$，则 $CF=\sqrt{5}$，$EF=\sqrt{6}$，$EC=3$，由余弦定理得 $\cos\angle ECF=\frac{9+5-6}{2\times3\times\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$，即直线 A_1G 与 CE 所成角的余弦值为 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$. 故选 C.

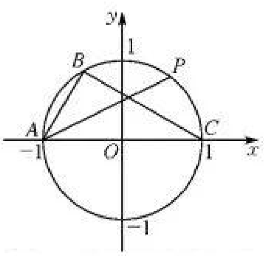


7. D　由题意得，甲车、乙车、丙车均不排队头或队尾，且各不相邻，所以甲、乙、丙只能在第二位、第四位、第六位，共有 A_3^3 种排法，其他车辆任意排列，所以总排法有 $A_3^3A_4^4=144$ 种. 故选 D.

8. A　由 $a_2=2a_1-2$，$S_2=a_1+a_2=a_1+(2a_1-2)=3a_1-2=10$，所以 $a_1=4$. 由 $a_{n+1}=2a_n-2$，所以 $a_{n+1}-2=2(a_n-2)$，又 $a_1-2=2$，所以数列 $\{a_n-2\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $a_n-2=2\times2^{n-1}=2^n$，即 $a_n=2^n+2$. 故选 A.

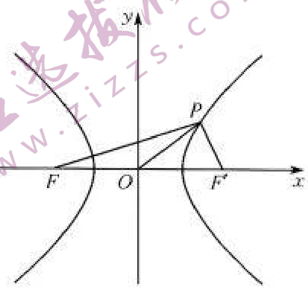
9. D　$f(x)=\sin x(\cos x-\sin x)=\sin x\cos x-\sin^2 x=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$，故 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，最大值为 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$，对称轴方程为 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$，故 ABC 皆错误；对于选项 D，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后得到 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+\frac{\pi}{4}\right]-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}$，然后，将此图象向上平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$ 的图象，$g(x)$ 是一个奇函数，故 D 正确，故选 D.

10. B　由余弦定理得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC=1+4-2\times1\times2\times\cos 60^\circ=3$，所以 $BC=\sqrt{3}$，所以 $AB^2+BC^2=AC^2$，所以 $AB\perp BC$. 以 AC 的中点为原点，建立如图所示的平面直角坐标系，易得 $A(-1,0)$，$C(1,0)$，$B\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，设 P 的坐标为 $(\cos\theta,\sin\theta)$，所以 $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(2,0)$，$\overrightarrow{AP}=(\cos\theta+1,\sin\theta)$，又 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，所以



$(\cos\theta+1,\sin\theta)=m\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+n(2,0)=\left(\frac{m}{2}+2n,\frac{\sqrt{3}}{2}m\right)$,所以 $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta,n=\frac{\cos\theta}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta$,所以 $m+n=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\frac{\cos\theta}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{\cos\theta}{2}+\frac{1}{2}=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\geqslant-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$,当且仅当 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-1$ 时,等号成立.故选 B.

11. A　记 F' 为 C 的右焦点,焦距为 $2c$,连 PF',则 $|PF'|=|PF|-2a=3b-2a$,由 $\angle POF+\angle POF'=\pi$,有 $\cos\angle POF+\cos\angle POF'=0$,有 $\frac{|OF|^2+|OP|^2-|PF|^2}{2|OF|\cdot|OP|}+\frac{|OF'|^2+|OP|^2-|PF'|^2}{2|OF'|\cdot|OP|}=0$,又 $|OF|=|OF'|$,所以 $2|OF|^2+2|OP|^2-|PF|^2-|PF'|^2=0$,即 $2c^2+6a^2-9b^2-(3b-2a)^2=0$,所以 $2(a^2+b^2)+6a^2-9b^2-(3b-2a)^2=0$,即 $a^2+3ab-4b^2=0$,所以 $(a+4b)(a-b)=0$,所以 $a=b$,或 $a=-4b$(舍),所以 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{2}$.故选 A.

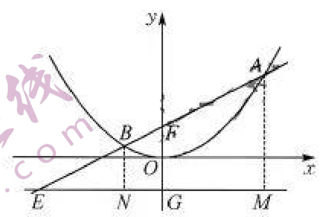


12. A　设 $f(x)=\ln x-x+1$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$.当 $x\in(0,1)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,所以 $f(x)\leqslant f(1)=0$,即 $\ln x\leqslant x-1$,所以 $\ln(a+b)\leqslant a+b-1$,所以 $a+b+c\leqslant a+b-1$,即 $c\leqslant-1$.又 $ac=b^2>0$,所以 $a<0$,由 $a+b>0$,所以 $b>-a>0$,所以 $b^2>a^2$,即 $ac>a^2$,所以 $c<a$,所以 $c<a<b$.故选 A.

13. $-\frac{1}{2}$　函数 $f(x)$ 为奇函数,函数 $g(x)=\log_3(3^x+1)+ax$ 为偶函数,故 $g(x)-g(-x)=0$,即 $[\log_3(3^x+1)+ax]-[\log_3(3^{-x}+1)-ax]=0$,$\log_3\frac{3^x+1}{3^{-x}+1}+2ax=0$,则 $\log_3\frac{3^x(3^{-x}+1)}{3^{-x}+1}+2ax=0$ 恒成立,化简可得 $x(1+2a)=0$ 恒成立,则 $a=-\frac{1}{2}$.

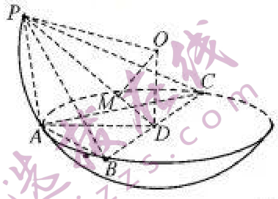
14. 77　因为 $f(a_{n+1})+f(3-a_n)=0$,且 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(a_{n+1})=f(a_n-3)$.又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $a_{n+1}=a_n-3$,即 $a_{n+1}-a_n=-3$,所以 $\{a_n\}$ 为等差数列,且公差为 -3,首项为 20,所以 $a_n=23-3n$,所以 $a_7>0$,$a_8<0$,所以 S_7 最大,且 $S_7=7\times20+\frac{7\times6}{2}\times(-3)=77$.

15. 3　过 A,B 分别作准线的垂线,垂足分别为 M,N,准线与 y 轴的交点为 G,则 $|AF|=|AM|$,$|BF|=|BN|$.因为 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{FA}$,所以 $|EF|=|AM|=\frac{1}{2}|AE|$,所以 $\angle AEM=30°$,所以 $|EB|=2|BN|=4$,所以 $|FG|=\frac{1}{2}|EF|=3$,即 $p=3$.



16. 10π　设球心为 O,取 BC 的中点 D,连接 AD,PD,OD,则 $PB=PC=\sqrt{3}$,$BC=\sqrt{2}$,由余弦定理可得 $\cos\angle BPC=\frac{2}{3}$,所以 $\sin\angle BPC=\frac{\sqrt{5}}{3}$,所以$\triangle BPC$ 外接圆的半径 $r=\frac{BC}{2\sin\angle BPC}=\frac{3}{\sqrt{10}}$,$AD=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$PD=\sqrt{3-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$.在$\triangle PAD$ 中,$\cos\angle PDA=\frac{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}-1}{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$,由题意可知 P,A,D,O 共面,所以 $\cos\angle ODP=\sin\angle PDA=\frac{1}{\sqrt{5}}$,所以 $OD=$

$\dfrac{\sqrt{\frac{5}{2}-\frac{3}{\sqrt{10}}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=\sqrt{2}$，所以外接球的半径 $R=\sqrt{(\sqrt{2})^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{2}}$，故三棱锥微信搜《高三答案公众号》



$P-ABC$ 外接球的表面积为 $4\pi\times\frac{5}{2}=10\pi$.

17. 解：(1)由 $\tan B=\dfrac{\cos C-2\cos A}{\sin C}$，得 $\sin B\sin C=\cos B\cos C-2\cos A\cos B$，

$\cos(B+C)=2\cos A\cos B$，即 $-\cos A=2\cos A\cos B$. ………………………………………… 2 分

因为 $a<b$，所以 A 为锐角，$\cos A\neq0$，所以 $\cos B=-\frac{1}{2}$. ………………………………………… 4 分

又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{2\pi}{3}$. ………………………………………… 6 分

(2)在△ABC 中，由余弦定理 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{1}{2}$，解得 $c=5$ 或 $c=-8$(舍). ………………… 9 分

故 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{15\sqrt{3}}{8}$. ………………………………………… 12 分

18. 解：(1) $\mu=\dfrac{35\times25+45\times150+55\times200+65\times250+75\times225+85\times100+95\times50}{1\,000}=65$，

………………………………………………………………………………………… 2 分

$\sigma^2=\frac{1}{1\,000}[(35-65)^2\times25+(45-65)^2\times150+(55-65)^2\times200+(65-65)^2\times250+(75-65)^2\times225+(85-65)^2\times100+(95-65)^2\times50]=210$，

所以 $\sigma\approx14$. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)设随机变量 N 表示胡老师的抽奖次数，则 N 的可能取值为 1，2.

$P(N=1)=P(X\leqslant79)\approx0.841\,3$，$P(N=2)=P(X>79)\approx0.158\,7$ ………………………………… 8 分

其分布列为

N	1	2
P	0.841 3	0.158 7

所以 $E(N)=1\times0.841\,3+2\times0.158\,7=1.158\,7$. ………………………………………… 9 分

设随机变量 T 为胡老师一次抽奖获得的红包金额，则 T 的可能取值为 10，20，

由题意知 $P(T=10)=\frac{3}{5}$，$P(T=20)=\frac{2}{5}$，

所以随机变量 T 的分布列为

T	10	20
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

$E(T)=10\times\frac{3}{5}+20\times\frac{2}{5}=14$. ………………………………………………………… 11 分

所以胡老师此次活动所获得红包的数学期望为 $1.158\,7\times14=16.221\,8\approx16$(元). ……………………… 12 分

19. (1)证明：因为四边形 $ABCD$ 为梯形，$AB/\!/CD$，$\angle C=60^\circ$，$CD=2CB=4AB=4$，

所以 $CE=1$，$BE=\sqrt{3}$，$AE=2$，$ED=3$，$\angle AED=60^\circ$，$\angle AEB=30^\circ$，即 $PE=3$，$\angle AEP=60^\circ$. ……………… 1 分

在△PEA 中，过 P 作 $PF\perp AE$，垂足为 F，连接 BF.

在△PEF 中，$PE=3$，$\angle AEP=60^\circ$，所以 $EF=\frac{3}{2}$. ………………………………………… 2 分

$\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $BF^2+EF^2=BE^2$,所以 $BF\perp EF$,即 $BF\perp EA$. ………………………………………… 3 分

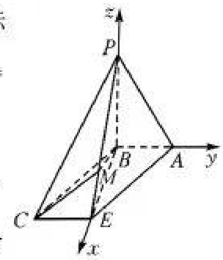
又 $BF\cap PF=F$,$BF,PF\subset$平面 BFP,所以 $AE\perp$平面 BFP. ………………………………………… 5 分

又 $PB\subset$平面 BFP,所以 $AE\perp PB$. ………………………………………………………………………… 6 分

(2) 解:在△PCE 中,$PC=\sqrt{10}$,$PE=3$,$CE=1$,所以 $PC^2=CE^2+PE^2$,所以 $CE\perp PE$.

又 $CE\perp BE$,$PE\cap BE=E$,$PE,BE\subset$平面 PBE,所以 $CE\perp$平面 PBE. 又 $PB\subset$平面 PBE,

所以 $CE\perp PB$. 又 $AE\perp PB$,$CE\cap AE=E$,$CE,AE\subset$平面 CAE,所以 $PB\perp$平面 CAE. ……………… 7 分



以 B 为坐标原点,BE,BA,BP 所在的直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系. 则 $B(0,0,0)$,$E(\sqrt{3},0,0)$,$P(0,0,\sqrt{6})$,$C(\sqrt{3},-1,0)$. 所以 $\overrightarrow{BC}=(\sqrt{3},-1,0)$,$\overrightarrow{BP}=(0,0,\sqrt{6})$,$\overrightarrow{BE}=(\sqrt{3},0,0)$,$\overrightarrow{EP}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{6})$.

设 $\overrightarrow{EM}=\lambda\overrightarrow{EP}=\lambda(-\sqrt{3},0,\sqrt{6})=(-\sqrt{3}\lambda,0,\sqrt{6}\lambda)$,$\lambda\in(0,1)$,则 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EM}=(\sqrt{3}+\sqrt{3}\lambda,0,\sqrt{6}\lambda)$. ………………………………………………………… 8 分

设平面 BCP 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x_1-y_1=0,\\ \sqrt{6}z_1=0.\end{cases}$ 令 $x_1=1$,解得 $y_1=\sqrt{3}$,$z_1=0$,所以

$\boldsymbol{n}_1=(1,\sqrt{3},0)$. …………………………………………………………………………………… 9 分

设平面 BCM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{BM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x_2-y_2=0,\\ (\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)x_2+\sqrt{6}\lambda z_2=0.\end{cases}$

令 $x_2=1$,则 $y_2=\sqrt{3}$,$z_2=-\frac{1-\lambda}{\sqrt{2}\lambda}$,所以 $\boldsymbol{n}_2=\left(1,\sqrt{3},-\frac{1-\lambda}{\sqrt{2}\lambda}\right)$. ………………………………… 10 分

因为二面角 $P-BC-M$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\left|\frac{4}{2\times\sqrt{4+\left(-\frac{1-\lambda}{\sqrt{2}\lambda}\right)^2}}\right|=\frac{\sqrt{6}}{3}$,解得 $\lambda=\frac{1}{3}$ 或 $\lambda=-1$

(舍). 所以存在点 M,使得二面角 $P-BC-M$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$,此时 $\frac{ME}{PE}=\frac{1}{3}$. ………………………… 12 分

20. (1)解:函数 $f(x)=a\ln(x+1)-3x$ 的定义域是 $(-1,+\infty)$,$f'(x)=\frac{a}{x+1}-3$. ………………………… 1 分

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)<0$,得 $x>\frac{a-3}{3}$;令 $f'(x)>0$,得 $-1<x<\frac{a-3}{3}$,

故 $f(x)$ 在 $\left(-1,\frac{a-3}{3}\right)$ 上单调递增,在 $\left(\frac{a-3}{3},+\infty\right)$ 上单调递减; ………………………………… 3 分

当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)<0$ 恒成立,故 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减.

综上,当 $a>0$ 时,$f(x)$ 在 $\left(-1,\frac{a-3}{3}\right)$ 上单调递增,在 $\left(\frac{a-3}{3},+\infty\right)$ 上单调递减;当 $a\leqslant 0$ 时,$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递减. …………………………………………………………………………………………………… 4 分

(2)证明:当 $a=1$ 时,方程 $f(x)=\sin x-3x$ 即为 $\ln(x+1)-3x=\sin x-3x$,即 $\ln(x+1)-\sin x=0$.

令 $g(x)=\ln(x+1)-\sin x$,则 $g'(x)=\frac{1}{x+1}-\cos x$, ……………………………………………………… 5 分

则“方程 $f(x)=\sin x-3x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 上有且仅有一个实数解”等价于“函数 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 上有且仅有一个零点”. …………………………………………………………………………………………… 6 分

当 $x>e-1$ 时，$\ln(x+1)>\ln e=1\geqslant\sin x$，所以 $g(x)>0$ 在 $(e-1,+\infty)$ 上恒成立，

所以只需证 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},e-1\right]$ 上有且仅有一个零点. ………………………………………… 8分

因为 $e-1<\pi$，所以当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},e-1\right]$ 时，$\cos x<0$，$\frac{1}{x+1}>0$，

所以 $g'(x)>0$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},e-1\right]$ 上恒成立. ………………………………………… 9分

所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},e-1\right]$ 上单调递增，又 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-\sin\frac{\pi}{2}=\ln\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-1<0$，$g(e-1)=1-\sin(e-1)$

>0， ………………………………………… 11分

所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},e-1\right]$ 上有且仅有一个零点，即 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 上有且仅有一个零点.

故方程 $f(x)=\sin x-3x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 上有且仅有一个实数解. ………………………………………… 12分

21. 解：(1)设椭圆 C 的焦距为 $2c$，由题意知 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，$D(0,b)$， ………………………………………… 1分

所以 $\overrightarrow{AD}=(a,b)$，$\overrightarrow{BD}=(-a,b)$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=-a^2+b^2=-c^2=-1$，解得 $c=1$.

又椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$，所以 $a=2c=2$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$， ………………………………………… 3分

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………… 4分

(2)假设存在这样的点 P，设点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，点 M,N 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，设直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+m$.

联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=\frac{1}{2}x+m\end{cases}$ 消去 y 后整理得 $x^2+mx+m^2-3=0$. ………………………………………… 6分

$\Delta=m^2-4(m^2-3)=12-3m^2>0$，得 $-2<m<2$，

有 $\begin{cases}x_1+x_2=-m,\\ x_1x_2=m^2-3.\end{cases}$

若直线 PM 与直线 PN 的倾斜角互补，则直线 PM 与直线 PN 的斜率之和为零， ………………………………………… 7分

所以 $\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}+\frac{y_0-y_2}{x_0-x_2}=\frac{y_0-\left(\frac{1}{2}x_1+m\right)}{x_0-x_1}+\frac{y_0-\left(\frac{1}{2}x_2+m\right)}{x_0-x_2}$

$=\frac{(2y_0-2m)-x_1}{2(x_0-x_1)}+\frac{(2y_0-2m)-x_2}{2(x_0-x_2)}=\frac{[(2y_0-2m)-x_1](x_0-x_2)+[(2y_0-2m)-x_2](x_0-x_1)}{2(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

$=\frac{(2y_0-2m)[2x_0-(x_1+x_2)]+2x_1x_2-(x_1+x_2)x_0}{2(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(2y_0-2m)(2x_0+m)+2(m^2-3)+mx_0}{2(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$

$=\frac{(4x_0y_0-6)+(2y_0-3x_0)m}{2(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{2(2x_0y_0-3)+(2y_0-3x_0)m}{2(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=0$. ………………………………………… 10分

所以 $\begin{cases}2x_0y_0-3=0,\\ 2y_0-3x_0=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=1,\\ y_0=\frac{3}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-1,\\ y_0=-\frac{3}{2}.\end{cases}$

故存在点 P 符合条件，点 P 的坐标为 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 或 $\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$. ………………………………………… 12分

22. 解：(1)由直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=-2+\dfrac{3\sqrt{10}}{10}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{10}}{10}t\end{cases}$（$t$ 为参数），消去参数 t，得 $x+2=3y$，

即 $x-3y+2=0$. ………………………………………………………………………… 2 分

由 $\rho=2\cos\theta$，得 $\rho^2=2\rho\cos\theta$，将 $\rho^2=x^2+y^2$，$x=\rho\cos\theta$ 代入上式，可得曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x=0$，即 $(x-1)^2+y^2=1$. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)将$\begin{cases}x=-2+\dfrac{3\sqrt{10}}{10}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{10}}{10}t\end{cases}$代入曲线 C 的直角坐标方程，

整理得 $5t^2-9\sqrt{10}t+40=0$，$\Delta=(-9\sqrt{10})^2-4\times5\times40=10>0$.

设 A，B 两点对应的参数分别为 t_1，t_2，则 $t_1+t_2=\dfrac{9\sqrt{10}}{5}$，$t_1\cdot t_2=8$，所以 t_1 与 t_2 同号，

由参数 t 的几何意义，可得 $|PA|+|PB|=|t_1|+|t_2|=|t_1+t_2|=\dfrac{9\sqrt{10}}{5}$，$|PA|\cdot|PB|=t_1\cdot t_2=8$.

………………………………………………………………………… 7 分

所以 $\dfrac{1}{|PA|^2}+\dfrac{1}{|PB|^2}=\dfrac{(|PA|+|PB|)^2-2|PA||PB|}{|PA|^2\cdot|PB|^2}=\dfrac{(t_1+t_2)^2-2t_1t_2}{(t_1\cdot t_2)^2}=\dfrac{\left(\dfrac{9\sqrt{10}}{5}\right)^2-2\times8}{8^2}=\dfrac{41}{160}$.

………………………………………………………………………… 10 分

23. 解：(1)当 $m=3$ 时，$f(x)=|x-6|-|3x+3|=\begin{cases}2x+9, x<-1,\\ -4x+3, -1\leqslant x\leqslant 6,\\ -2x-9, x>6.\end{cases}$ ……………………… 2 分

因为 $f(x)\geqslant2$，所以$\begin{cases}x<-1,\\ 2x+9\geqslant2\end{cases}$或$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant6,\\ -4x+3\geqslant2\end{cases}$或$\begin{cases}x>6,\\ -2x-9\geqslant2.\end{cases}$ ……………………… 4 分

解得 $-\dfrac{7}{2}\leqslant x<-1$ 或 $-1\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{4}$.

所以不等式 $f(x)\geqslant2$ 的解集为 $\left\{x\middle|-\dfrac{7}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{4}\right\}$. ………………………………………… 5 分

(2)对于任意实数 x，t，不等式 $f(x)<|4+t|+|t-3|$ 恒成立，等价于 $f(x)_{\max}<(|4+t|+|t-3|)_{\min}$.

………………………………………………………………………… 7 分

因为 $|4+t|+|t-3|\geqslant|(4+t)-(t-3)|=7$，当且仅当 $(4+t)(t-3)\leqslant0$ 时等号成立，

所以 $(|4+t|+|t-3|)_{\min}=7$. ………………………………………………………… 8 分

因为 $m>0$，所以 $f(x)=|x-2m|-|3x+m|=\begin{cases}2x+3m, x<-\dfrac{m}{3},\\ -4x+m, -\dfrac{m}{3}\leqslant x\leqslant 2m,\\ -2x-3m, x>2m.\end{cases}$

函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-\infty,-\dfrac{m}{3}\right)$，单调递减区间为 $\left(-\dfrac{m}{3},+\infty\right)$，

所以当 $x=-\dfrac{m}{3}$ 时，$f(x)_{\max}=f\left(-\dfrac{m}{3}\right)=\dfrac{7m}{3}$. ………………………………………… 9 分

所以 $\dfrac{7m}{3}<7$，解得 $m<3$，所以 $0<m<3$.

所以实数 m 的取值范围是 $(0,3)$. ……………………………………………