



2018 年全国高中数学联赛（福建省赛区）预赛 暨 2018 年福建省高中数学竞赛试卷参考答案

（考试时间：2018 年 5 月 20 日上午 9:00—11:30，满分 160 分）

一、填空题（共 10 小题，每小题 6 分，满分 60 分。请直接将答案写在题中的横线上）

1. 将正偶数集合 $\{2, 4, 6, \dots\}$ 从小到大按第 n 组有 $3n-2$ 个数进行分组： $\{2\}$ ， $\{4, 6, 8, 10\}$ ， $\{12, 14, 16, 18, 20, 22, 24\}$ ， $\dots$ ，则 2018 位于第_____组。

【答案】 27

【解答】设 2018 在第 n 组，由 2018 为第 1009 个正偶数，以及题意，得

$$\sum_{i=1}^{n-1} (3i-2) < 1009 \leq \sum_{i=1}^n (3i-2), \text{ 即 } \frac{3(n-1)^2 - (n-1)}{2} < 1009 \leq \frac{3n^2 - n}{2}.$$

解得正整数 $n = 27$ 。

$\therefore$ 2018 位于第 27 组。

2. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A 、 B 、 C 所对的边分别是 a 、 b 、 c 。若 $a = 2$ ， $b = 3$ ， $C = 2A$ ，则 $\cos C =$ _____。

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解答】由 $C = 2A$ ，知 $\sin C = \sin 2A = 2 \sin A \cos A$ 。结合正弦定理，得 $c = 2a \cos A$ 。

由 $a = 2$ ， $b = 3$ ，及余弦定理，得 $c = 2a \cos A = 2a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ， $c = 4 \times \frac{9 + c^2 - 4}{6c}$ 。

$\therefore c^2 = 10$ ， $c = \sqrt{10}$ 。

$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{4 + 9 - 10}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{4}$ 。

3. 设复数 z 满足 $|z - i| = 2$ ，则 $|z - \bar{z}|$ 的最大值为_____。（ i 为虚数单位， $\bar{z}$ 为复数 z 的共轭复数）

【答案】 6

【解答】设 $z = x + yi$ （ $x, y \in \mathbb{R}$ ），

则 $\bar{z} = x - yi$ ， $z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi$ ， $|z - \bar{z}| = 2|y|$ 。

由 $|z - i| = 2$ ，知 $|(x + yi) - i| = 2$ ， $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ 。

$\therefore (y - 1)^2 \leq 4$ ， $-1 \leq y \leq 3$ 。

$\therefore |z - \bar{z}| = 2|y| \leq 6$ ，当且仅当 $y = 3$ ，即 $z = 3i$ 时，等号成立。

$\therefore |z - \bar{z}|$ 的最大值为 6。

4. 已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称, 当 $0 < x \leq 2$ 时, $f(x)=x+1$, 则 $f(-100)+f(-101)=$ _____。

【答案】 2

【解答】由 $f(x)$ 为奇函数, 且其图像关于直线 $x=2$ 对称, 知 $f(-x)=-f(x)$, 且 $f(2-x)=f(2+x)$ 。

$\therefore f(x+4)=f(-x)=-f(x)$, $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$ 。 $f(x)$ 是以 8 为周期的周期函数。

又 $f(3)=f(1)=2$, $f(4)=f(0)=0$ 。

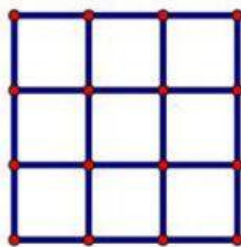
$\therefore f(-100)+f(-101)=f(4)+f(3)=0+2=2$ 。

5. 从如图所示的由 9 个单位小方格组成的 3×3 方格表的 16 个顶点中任取三个顶点, 则这三个点构成直角三角形的概率为_____。

【答案】 $\frac{9}{35}$

【解答】先计算矩形的个数, 再计算直角三角形的个数。

根据矩形特点, 由这 16 个点可以构成 $C_4^2 \times C_4^2 = 36$ 个不同的矩形。



又每个矩形可以分割成 4 个不同的直角三角形, 且不同的矩形, 分割所得的直角三角形也不同。

因此, 可得 $4 \times 36 = 144$ 个不同的直角三角形。

故, 所求的概率为 $P = \frac{144}{C_{16}^3} = \frac{144}{40 \times 14} = \frac{9}{35}$ 。

自主招生在线
微信号: zizzsw

自主招生在线
微信号: zizzsw

6. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\triangle PAC$ 、 $\triangle ABC$ 都是边长为 6 的等边三角形. 若二面角 $P-AC-B$ 的大小为 120° , 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的面积为_____。

【答案】 84π

【解答】 如图, 取 AC 中点 D , 连 DP 、 DB 。

则由 $\triangle PAC$ 、 $\triangle ABC$ 都是边长为 6 的等边三角形, 得
 $PD \perp AC$, $BD \perp AC$, $\angle PDB$ 为二面角 $P-AC-B$ 的平面角, $\angle PDB = 120^\circ$ 。

设 O 为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心, O_1 、 O_2 分别为 $\triangle ABC$ 、 $\triangle PAC$ 的中心。

则 $OO_1 \perp$ 面 ABC , $OO_2 \perp$ 面 PAC , 且

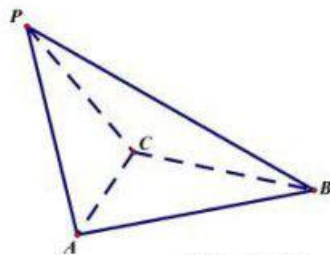
$$O_2D = O_1D = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 \right) = \sqrt{3}, \quad OO_2 = OO_1.$$

易知 O 、 O_2 、 D 、 O_1 四点共面, 连 OD , 则 $\angle ODO_1 = 60^\circ$,
 $OO_1 = \sqrt{3}DO_1 = 3$ 。

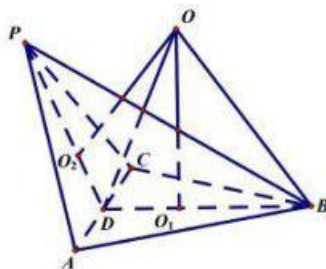
$\therefore$ 三棱锥 $P-ABC$ 外接球半径

$$R = OB = \sqrt{OO_1^2 + O_1B^2} = \sqrt{3^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{21}.$$

$\therefore$ 三棱锥 $P-ABC$ 外接球的面积为 $4\pi R^2 = 84\pi$ 。



(第 6 题图)



7. 已知 F_1 、 F_2 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 的左、右焦点, 点 P 在双曲线 C 上, G 、 I 分别为 $\triangle F_1PF_2$ 的重心、内心, 若 $GI \parallel x$ 轴, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的外接圆半径 $R =$ _____。

【答案】 5

【解答】不妨设 $P(x_0, y_0)$ 在第一象限, $|PF_1| = r_1$, $|PF_2| = r_2$ 。

依题意, $r_1 - r_2 = 4$, $|F_1F_2| = 8$ 。

由 G 、 I 分别为 $\triangle F_1PF_2$ 的重心、内心, $GI \parallel x$ 轴, 得 $\triangle F_1PF_2$ 内切圆半径 $r = \frac{1}{3}y_0$ 。

$$\therefore S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2}(|F_1P| + |F_1F_2| + |F_2P|) \cdot r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2 + 8) \cdot \frac{1}{3}y_0。$$

$$\text{又 } S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2} \cdot |F_1F_2| \cdot y_0 = 4y_0。$$

$$\therefore \frac{1}{2}(r_1 + r_2 + 8) \cdot \frac{1}{3}y_0 = 4y_0。$$

$$\therefore r_1 + r_2 = 16, \text{ 结合 } r_1 - r_2 = 4, \text{ 得 } r_1 = 10, r_2 = 6。$$

由此得到, $|F_1P|^2 = |F_1F_2|^2 + |F_2P|^2$ 。因此, $PF_2 \perp F_1F_2$ 。

$$\therefore \triangle F_1PF_2 \text{ 的外接圆半径 } R = \frac{1}{2}|F_1P| = 5。$$

8. 最近网络上有一篇文章很火。源于一道常见题目:(见图), 这貌似易解的题目, 里面竟然蕴藏了深奥的大道理。

(本题不作为本次考试的试题, 本次试题如下)

设 $a, b \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 则 $\frac{a}{10b+a} + \frac{b}{10a+b}$ 的最大值为 _____。

【答案】 $\frac{89}{287}$

【解答】不妨设 $a \geq b$, $x = \frac{a}{b}$, 则 $1 \leq x \leq 4$, 且

$$\begin{aligned} \frac{a}{10b+a} + \frac{b}{10a+b} &= \frac{\frac{a}{b}}{10 + \frac{a}{b}} + \frac{1}{10 \cdot \frac{a}{b} + 1} = \frac{x}{10+x} + \frac{1}{10x+1} = \frac{10x^2+2x+10}{10x^2+101x+10} \\ &= 1 - \frac{99x}{10x^2+101x+10} = 1 - \frac{99}{10(x+\frac{1}{x})+101} \end{aligned}$$

$$\therefore 1 \leq x \leq 4, \text{ 当 } x=4 \text{ 时, } 10(x+\frac{1}{x})+101 \text{ 取最大值 } 10(4+\frac{1}{4})+101。$$



$$\therefore \text{当 } x=4 \text{ 时, } 1 - \frac{99}{10(x+\frac{1}{x})+101} \text{ 取最大值 } 1 - \frac{99}{10(4+\frac{1}{4})+101} = \frac{89}{287}.$$

$$\therefore \text{当 } a=8, b=2 \text{ (或 } a=2, b=8 \text{)} \text{ 时, } \frac{a}{10b+a} + \frac{b}{10a+b} \text{ 取最大值 } \frac{89}{287}.$$



自主招生在线创始

9. 已知整数系数多项式 $f(x) = x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$, 若 $f(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 0$, $f(1) + f(3) = 0$, 则 $f(-1) =$ _____。

【答案】 24

【解答】 设 $x_0 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, 则 $x_0 - \sqrt{3} = \sqrt{2}$, $(x_0 - \sqrt{3})^2 = 2$,

于是 $x_0^2 - 2\sqrt{3}x_0 + 3 = 2$, $2\sqrt{3}x_0 = x_0^2 + 1$ 。

$\therefore (2\sqrt{3}x_0)^2 = (x_0^2 + 1)^2$, $x_0^4 - 10x_0^2 + 1 = 0$ 。

$\therefore x_0 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 是多项式 $g(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ 的一个根。

又 $x_0 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 不可能是三次整数系数多项式、二次整数系数多项式的零点。

$\therefore g(x)$ 整除 $f(x)$ 。

$\therefore f(x) = g(x)(x-r) = (x^4 - 10x^2 + 1)(x-r)$, r 为整数。

$\therefore f(1) = -8(1-r) = -8+8r$, $f(3) = -8(3-r) = -24+8r$ 。

由 $f(1) + f(3) = 0$, 得 $(-8+8r) + (-24+8r) = 0$, $r = 2$ 。

$\therefore f(x) = (x^4 - 10x^2 + 1)(x-2)$, $f(-1) = 24$ 。

10. 已知函数 $f(x)$ 满足: 对任意实数 x, y , 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 6xy$ 成立, 且

$f(-1) \cdot f(1) \geq 9$, 则 $f(\frac{2}{3}) =$ _____。



二、解答题（共 5 小题，每小题 20 分，满分 100 分。要求写出解题过程）

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $2S_n - na_n = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, 且 $a_2 = 3$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n \sqrt{a_{n+1}} + a_{n+1} \sqrt{a_n}}$, T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 求使 $T_n > \frac{9}{20}$ 成立的最小正整

数 n 的值。

【解答】 (1) 由 $2S_n - na_n = n$, 得 $2S_{n+1} - (n+1)a_{n+1} = n+1$ 。

将上述两式相减, 得 $2a_{n+1} - (n+1)a_{n+1} + na_n = 1$ 。 5 分

$\therefore na_n - (n-1)a_{n+1} = 1$ 。 ①

$\therefore (n+1)a_{n+1} - na_{n+2} = 1$ 。 ②

①-②, 得 $na_n - 2na_{n+1} + na_{n+2} = 0$,

$\therefore a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1}$ 。

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列。

又由 $2S_1 - a_1 = 1$, 及 $a_2 = 3$, 得 $a_1 = 1$, $\{a_n\}$ 的公差 $d = 2$ 。

$\therefore a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$ 。 10 分

解法二: 用数学归纳法 (略)

注: 若猜出 $a_n = 2n-1$, 没有证明, 扣 5 分。

(2) 由 (1) 知, $b_n = \frac{1}{(2n-1)\sqrt{2n+1} + (2n+1)\sqrt{2n-1}}$ 。

【答案】 $\frac{4}{3}$

【解答】 在 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 6xy$ 中,

令 $x = y = 0$, 得 $f(0) = f(0) + f(0) + 0$, $f(0) = 0$ 。

令 $x = -1$, $y = 1$, 得 $f(0) = f(1) + f(-1) + (-6)$, $f(1) + f(-1) = 6$ 。

又 $f(-1) \cdot f(1) \geq 9$,

$\therefore [6 - f(1)] \cdot f(1) \geq 9$, 即 $[f(1)]^2 - 6f(1) + 9 \leq 0$, $[f(1) - 3]^2 \leq 0$, $f(1) = 3$ 。

又 $f(\frac{2}{3}) = f(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) = f(\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{3}) + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 2f(\frac{1}{3}) + \frac{2}{3}$,

$f(1) = f(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) = f(\frac{1}{3}) + f(\frac{2}{3}) + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$ 。

$\therefore f(1) = f(\frac{1}{3}) + 2f(\frac{1}{3}) + \frac{2}{3} + 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 3f(\frac{1}{3}) + 2 = 3$ 。

$\therefore f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$, $f(\frac{2}{3}) = 2f(\frac{1}{3}) + \frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ 。

12. 已知 F_1 、 F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点, 点 $P(\frac{2\sqrt{6}}{3}, 1)$ 在椭圆 C 上, 且 $\triangle F_1PF_2$ 的垂心为 $H(\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{5}{3})$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设 A 为椭圆 C 的左顶点, 过点 F_2 的直线 l 交椭圆 C 于 D 、 E 两点, 记直线 AD 、 AE 的斜率分别为 k_1 、 k_2 , 若 $k_1 + k_2 = -\frac{1}{2}$, 求直线 l 的方程。

【解答】设 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ 。由 $\triangle F_1PF_2$ 的垂心为 $H(\frac{2\sqrt{6}}{3}, -\frac{5}{3})$, 得 $F_1H \perp PF_2$ 。

$$\therefore k_{F_1H} \cdot k_{PF_2} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{2\sqrt{6}}{3} + c} \cdot \frac{1}{\frac{2\sqrt{6}}{3} - c} = -1, \quad \frac{24}{9} - c^2 = \frac{5}{3}, \text{ 解得 } c^2 = 1. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

由点 $P(\frac{2\sqrt{6}}{3}, 1)$ 在椭圆 C 上, 得 $\frac{24}{9a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ 。结合 $a^2 - b^2 = c^2 = 1$, 解得 $a^2 = 4$, $b^2 = 3$ 。

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(2) 由 (1), 知 $A(-2, 0)$, $F_2(1, 0)$ 。

若 l 斜率不存在, 则由对称性, $k_1 + k_2 = 0$, 不符合要求。

若 l 斜率存在, 设为 k , 则 l 方程为 $y = k(x - 1)$ 。

$$\begin{aligned} \therefore b_n &= \frac{1}{\sqrt{2n-1} \cdot \sqrt{2n+1} \cdot (\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1})} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n-1} \cdot \sqrt{2n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right). \dots\dots\dots 15 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\therefore T_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right).$$

$$\text{由 } T_n > \frac{9}{20}, \text{ 得 } \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right) > \frac{9}{20}.$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{10}, \quad 2n+1 > 100, \quad n \geq \frac{99}{2}.$$

$$\therefore \text{使 } T_n > \frac{9}{20} \text{ 成立的最小正整数 } n \text{ 的值为 } 50.$$

若 l 斜率存在, 设为 k , 则 l 方程为 $y = k(x-1)$ 。

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x-1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (4k^2+3)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0 \quad \text{①}$$

设 $D(x_1, y_1)$, $E(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{4k^2+3}$, $x_1x_2 = \frac{4k^2-12}{4k^2+3}$ 。..... 15 分

$$\therefore k_1 + k_2 = \frac{y_1}{x_1+2} + \frac{y_2}{x_2+2} = \frac{k(x_1-1)}{x_1+2} + \frac{k(x_2-1)}{x_2+2} = k\left(1 - \frac{3}{x_1+2} + 1 - \frac{3}{x_2+2}\right)$$

$$= k \cdot \left[2 - \frac{3(x_1+x_2+4)}{(x_1+2)(x_2+2)} \right] = k \cdot \left[2 - \frac{3(x_1+x_2+4)}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4} \right] = k \cdot \left[2 - \frac{3\left(\frac{8k^2}{4k^2+3} + 4\right)}{\frac{4k^2-12}{4k^2+3} + 2 \times \frac{8k^2}{4k^2+3} + 4} \right]$$

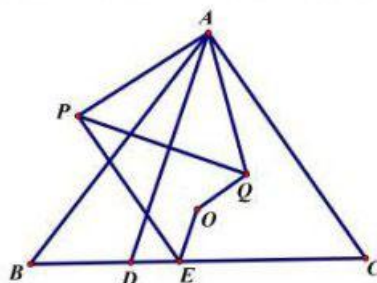
$$= k \cdot \left[2 - \frac{3(8k^2+16k^2+12)}{4k^2-12+16k^2+16k^2+12} \right] = k \cdot \left(2 - \frac{2k^2+1}{k^2} \right) = -\frac{1}{k}。$$

又 $k_1 + k_2 = -\frac{1}{2}$, 因此, $k = 2$, 直线 l 方程为 $y = 2(x-1)$ 。..... 20 分

13. 如图, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 是边 BC 上的点, $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ADC$ 的外心分别为 O 、 P 、 Q 。

证明: (1) $\triangle APQ \sim \triangle ABC$;

(2) 若 $EO \perp PQ$, 则 $QO \perp PE$ 。



(第 13 题图)

【解答】(1) 连结 PD , QD 。

$\because P$ 、 Q 分别为 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ADC$ 的外心,

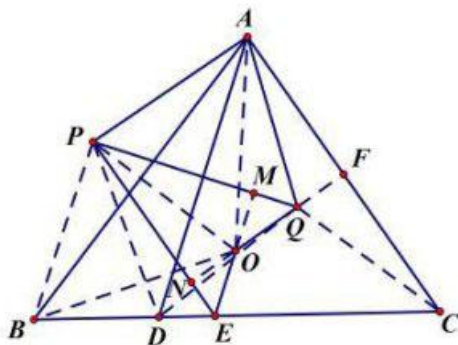
$\therefore PQ$ 为线段 AD 的垂直平分线。

$$\therefore \angle APQ = \frac{1}{2} \angle APD = \angle ABD = \angle ABC,$$

$$\angle AQP = \frac{1}{2} \angle AQD = \angle ACD = \angle ACB。$$

$\therefore \triangle APQ \sim \triangle ABC$ 。..... 5 分

(2) 连结 OA , OB , OP , PB , QC , 延长 OQ 与 AC 相交于点 F 。由 O 、 P 、 Q 分别为 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ADC$ 的外心, 知 OP 、 OQ 、 PQ 分别是线段 AB 、 AC 、 AD 的垂直平分线。





$\therefore \angle APB = \angle APD + \angle BPD = 2(\angle ABD + \angle BAD) = 2\angle ADC = \angle AQC$ 。

又 $\angle OBP = \angle OAP$, $\angle AQF = \frac{1}{2}\angle AQC = \frac{1}{2}\angle APB = \angle APO$ 。

$\therefore A、P、O、Q$ 四点共圆, $\angle OAP = \angle OQP$ 。..... 10 分

又 $EO \perp PQ$, $DA \perp PQ$,

$\therefore EO \parallel DA$, $\angle OEC = \angle ADC = \frac{1}{2}\angle APB = \angle BPO$ 。

$\therefore P、B、E、O$ 四点共圆, $\angle OEP = \angle OBP$ 。..... 15 分

设 EO , QO 的延长线分别与 PQ , PE 相交于 M , N ,

则 $\angle OEP = \angle OBP = \angle OAP = \angle OQP$ 。

$\therefore M、N、E、Q$ 四点共圆。

又 $EO \perp PQ$,

$\therefore \angle QNE = \angle QME = 90^\circ$ 。

$\therefore QO \perp PE$ 。..... 20 分



14. 已知 $f(x) = e^x - mx$ 。

(1) 若 $x > 0$ 时, 不等式 $(x-2)f(x) + mx^2 + 2 > 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若 x_1, x_2 是函数 $f(x)$ 的两个零点, 求证: $x_1 + x_2 > 2$ 。

【解答】(1) 设 $g(x) = (x-2)f(x) + mx^2 + 2$, 则 $g(x) = (x-2)e^x + 2mx + 2$ 。

$x > 0$ 时, 不等式 $(x-2)f(x) + mx^2 + 2 > 0$ 恒成立 $\Leftrightarrow x > 0$ 时, $g(x) > 0$ 恒成立。

$\therefore g'(x) = e^x + (x-2)e^x + 2m = (x-1)e^x + 2m$, $g''(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$ 。

$\therefore x > 0$ 时, $g''(x) = xe^x > 0$, $g'(x) = (x-1)e^x + 2m$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上为增函数。

另由 $g(2) = 4m + 2 > 0$, 知 $m > -\frac{1}{2}$ 。

① 若 $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$, 则 $g'(0) = -1 + 2m < 0$, $g'(2) = e^2 + 2m > 0$ 。

此时, $g'(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 内有唯一零点, 设为 x_0 。则 $0 < x < x_0$ 时, $g'(x) < 0$ 。

$\therefore g(x)$ 在区间 $[0, x_0]$ 上为减函数, $g(x_0) < g(0) = 0$ 。因此, $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ 不符合要求。

..... 5 分

② 若 $m \geq \frac{1}{2}$, 则 $x > 0$ 时, $g'(x) > g'(0) = -1 + 2m \geq 0$ 。此时, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数。

$\therefore x > 0$ 时, $g(x) > g(0) = 0$ 。因此, $m \geq \frac{1}{2}$ 符合要求。

由①、②，得 m 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 。 10 分

(2) $\because x_1, x_2$ 是函数 $f(x) = e^x - mx$ 的两个零点，
 $\therefore e^{x_1} = mx_1, e^{x_2} = mx_2, m(x_1 + x_2) = e^{x_1} + e^{x_2}, m(x_1 - x_2) = e^{x_1} - e^{x_2}$ 。
 不妨设 $x_1 > x_2$ ，易知 $m \neq 0$ ，联立上述两式，消 m ，得
 $x_1 + x_2 = \frac{(x_1 - x_2)(e^{x_1} + e^{x_2})}{e^{x_1} - e^{x_2}} = \frac{(x_1 - x_2)(e^{x_1 - x_2} + 1)}{e^{x_1 - x_2} - 1}$ 。 15 分

又由 (1) 知，对 $m = \frac{1}{2}$ ，当 $x > 0$ 时， $g(x) = (x - 2)e^x + 2mx + 2 > 0$ 恒成立。

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时， $(x - 2)e^x + x + 2 > 0$ 恒成立。

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时， $\frac{x(e^x + 1)}{e^x - 1} - 2 = \frac{xe^x + x - 2e^x + 2}{e^x - 1} = \frac{(x - 2)e^x + x + 2}{e^x - 1} > 0$ 。

$\therefore x_1 + x_2 - 2 = \frac{(x_1 - x_2)(e^{x_1 - x_2} + 1)}{e^{x_1 - x_2} - 1} - 2 > 0, x_1 + x_2 > 2$ 。

当 $x_1 < x_2$ 时，同理可得， $x_1 + x_2 > 2$ 。 $\therefore x_1 + x_2 > 2$ 。 20 分

15. 设 M 是由有限个正整数构成的集合，且 $M = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{20} = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{20}$ ，这里 $A_i \neq \emptyset, B_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \dots, 20$ ，并对任意的 $1 \leq i < j \leq 20$ ，都有 $A_i \cap A_j = \emptyset, B_i \cap B_j = \emptyset$ 。

已知对任意的 $1 \leq i \leq 20, 1 \leq j \leq 20$ ，若 $A_i \cap B_j = \emptyset$ ，则 $|A_i \cup B_j| \geq 18$ ，求集合 M 的元素个数的最小值。（这里， $|X|$ 表示集合 X 的元素个数）

【解答】 记 $\min\{|A_1|, |A_2|, \dots, |A_{20}|, |B_1|, |B_2|, \dots, |B_{20}|\} = t$ 。

不妨设 $|A_1| = t, A_1 \cap B_i \neq \emptyset, i = 1, 2, \dots, k; A_1 \cap B_j = \emptyset, j = k + 1, k + 2, \dots, 20$ 。

设 $a_i \in A_1 \cap B_i, i = 1, 2, \dots, k$ 。

$\therefore$ 对任意的 $1 \leq i < j \leq 20$ ，都有 $B_i \cap B_j = \emptyset$ ，

$\therefore a_1, a_2, \dots, a_k$ 互不相同， $|A_1| \geq k$ ，即 $t \geq k$ 。 5 分

$\therefore$ 对任意的 $1 \leq i \leq 20, 1 \leq j \leq 20$ ，若 $A_i \cap B_j = \emptyset$ ，则 $|A_i \cup B_j| \geq 18$ ，

$\therefore$ 当 $j = k + 1, k + 2, \dots, 20$ 时， $|A_1| + |B_j| = |A_1 \cup B_j| \geq 18$ 。

即, 当 $j = k+1, k+2, \dots, 20$ 时, $|B_j| \geq 18-t$ 10 分

$$\therefore |M| = |B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{20}| = |B_1| + |B_2| + \dots + |B_k| + |B_{k+1}| + \dots + |B_{20}|$$

$$\geq kt + (20-k)(18-t) = 360 + 2kt - 18k - 20t = 180 + 2(k-10)(t-9)$$

若 $t \leq 9$, 则 $k \leq t \leq 9$, $|M| = 180 + 2(k-10)(t-9) \geq 180$ 。

若 $t \geq 10$, 则 $|M| \geq 20t \geq 200$ 。

$\therefore$ 总有 $|M| \geq 180$ 15 分

另一方面, 取 $A_i = B_i = \{9(i-1)+1, 9(i-1)+2, \dots, 9(i-1)+9\}$, $i=1, 2, \dots, 20$,

则 $M = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{20} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{20} = \{1, 2, \dots, 180\}$ 符合要求。

此时, $|M| = 180$ 。

综上所述, 集合 M 的元素个数的最小值 180. 20 分



于 2014 年, 是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台, 旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵, 关注用户超百万, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生, 引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注自主招生在线官方微信号: **zizzsw**。



微信扫一扫, 快速关注