2023年河南省五市高三第二次联考
数学（文科）参考答案

一、选择题：1-6. ADBDCB　　7-12. BBDCDB

二、填空题：13. -9　　14. $\sqrt{10}$　　15. 2　　16. $[0,1]$

三、解答题

17.解：（1）因为当$n=1$时，$a_1=1$，当$n\ge 2$时，有$3S_{n-1}=4a_{n-1}-1$，又$3S_n=4a_n-1$，

两式相减得$3a_n=4a_n-4a_{n-1}$，则有$a_n=4a_{n-1}$，　　…………………………4分

所以数列$\{a_n\}$是以1为首项、4为公比的等比数列. 所以数列$\{a_n\}$的通项为$a_n=4^{n-1}$.　……5分

（2）由（1）知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\dfrac{4^n-1}{3}$，

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{(a_n+2)\times 3(S_n+1)}=\frac{4^n}{(4^{n-1}+2)\times(4^n+2)}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4^{n-1}+2}-\frac{1}{4^n+2}\right)$$　………………8分

所以

$$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{4}{3}\left[\left(\frac{1}{4^0+2}-\frac{1}{4^1+2}\right)+\left(\frac{1}{4^1+2}-\frac{1}{4^2+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4^{n-1}+2}-\frac{1}{4^n+2}\right)\right]$$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4^n+2}\right)<\frac{4}{9}.$$

所以数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n<\dfrac{4}{9}$.　………………12分

18.解（1）由题意得$\bar{x}=\dfrac{160+170+175+185+190}{5}=176$，$\bar{y}=\dfrac{170+174+175+180+186}{5}=177$，　……2分

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\frac{156045-5\times176\times177}{155450-5\times176^2}=\frac{156045-155760}{155450-154880}=\frac{285}{570}=0.5,$$

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=177-0.5\times176=89$，所以回归直线方程为$\hat{y}=0.5x+89$，　………………4分

令$0.5x+89-x>0$得$x<178$，即$x<178$时，儿子比父亲高；
令$0.5x-89-x<0$得$x>178$，即$x>178$时，儿子比父亲矮，
可得当父亲身高较高时，儿子平均身高要矮于父亲，即儿子身高有一个回归，回归到全种群平均高度的趋势.　………………6分

（2）由$\hat{y}=0.5x+89$可得$\hat{y}_1=0.5\times160+89=169$，$\hat{y}_2=174$，$\hat{y}_3=176.5$，$\hat{y}_4=181.5$，$\hat{y}_5=184$，

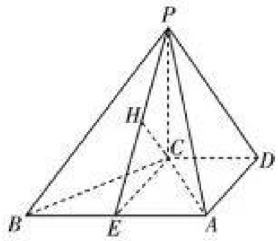
所以 $\sum_{i=1}^{5}\hat{y}_i=885$，又 $\sum_{i=1}^{5}y_i=885$，所以 $\sum_{i=1}^{5}\hat{e}_i=\sum_{i=1}^{5}(y_i-\hat{y}_i)=\sum_{i=1}^{5}y_i-\sum_{i=1}^{5}\hat{y}_i=0$，　　………………9 分

结论：对任意具有线性相关关系的变量 $\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_i=0$，

证明：$\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_i=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{b}x_i-\hat{a}\right)=\sum_{i=1}^{n}y_i-\hat{b}\sum_{i=1}^{n}x_i-n\hat{a}=n\overline{y}-n\hat{b}\overline{x}-n(\overline{y}-\hat{b}\overline{x})=0$.　　………12 分

（注：18 题第（2）问若只有最后的证明，同样给满分.）

19.（1）如图，连接 AC，来源：高三答案公众号



$\because PA=PB$，$\angle APC=\angle BPC$，$PC=PC$，$\therefore \triangle PAC\cong\triangle PBC$，

$\therefore \angle PCA=\angle PCB=90^\circ$，即 $PC\perp AC$.

$\because PC\perp BC$，$AC\cap BC=C$，$PC\perp$ 平面 $ABCD$，

又 $AD\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PC\perp AD$.　　……………………5 分

（2）取 AB 的中点 E，连接 PE，CE.

$\because PA=PB$，$\therefore PE\perp AB$，由（1）知 $AC=BC$，$\therefore CE\perp AB$，

$\because PE\cap CE=E$，$\therefore AB\perp$ 平面 PCE，

又 $AB\subset$ 平面 PAB，$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PCE.　　…………………………8 分

过 C 作 $CH\perp PE$ 于 H，则 $CH\perp$ 平面 PAB，由条件知 $CH=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

易知 $PC\perp CE$，设 $CE=m$，则 $PE=\sqrt{3+m^2}$，

由 $\dfrac{1}{2}PC\cdot CE=\dfrac{1}{2}PE\cdot CH$，即 $\sqrt{3}m=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{3+m^2}$，得 $m=\sqrt{3}$，$\therefore CE=\sqrt{3}$.　　…………10 分

$\because PD\perp AD$，$AD\perp PC$，$PC\cap PD=P$，$\therefore AD\perp$ 平面 PCD，$\therefore AD\perp CD$，

又 $\because AB\,//\,CD$，$\therefore AD\perp AB$，$\therefore$ 四边形 $AECD$ 为矩形，$\therefore AD=CE=\sqrt{3}$.　　………12 分

20.解:（1）由题可知，$f'(x)=e^{x-1}+a$

当 $a>0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，$f(x)$ 单调递增，

$\exists x_0<0$，且 $x_0<-\dfrac{1}{ae}$，使 $f(x_0)=e^{x_0-1}+ax_0<e^{-1}+a(-\dfrac{1}{ae})=0$，所以 $a>0$ 时不符合题意；

当 $a=0$ 时，$f(x)=e^{x-1}>0$，显然成立；　　…………………………2 分

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1+\ln(-a)$，

易知 $x\in(-\infty,1+\ln(-a))$ 时，$f(x)$ 单调递减；$x\in(1+\ln(-a),+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增.

若 $f(x)\ge 0$ 恒成立，则 $f\left(1+\ln(-a)\right)=-a+a\left[1+\ln(-a)\right]=a\ln(-a)\ge 0$，解之得 $-1\le a<0$.

综上可得 a 的取值范围为 $[-1,0]$. 来源：高三答案公众号 ……………………5 分

（2）由题可知 $x>0$，令 $g(m)=\dfrac{e^x}{x}\cdot m+\ln x-\sin x-1$，可看成关于 m 的一次函数，且单调递增.

当 $m\ge 1$ 时，$g(m)\ge g(1)$，所以若证原不等式成立，即证 $\dfrac{e^x}{x}+\ln x-\sin x-1>0$， ………8 分

因为 $\dfrac{e^x}{x}=e^{x-\ln x}$，$\dfrac{e^x}{x}+\ln x-\sin x-1=e^{x-\ln x}-x+\ln x-1+x-\sin x$，

由（1）知 $e^{x-1}-x\ge 0$，

把 x 换成 $x-\ln x+1$ 易得 $e^{x-\ln x}-(x-\ln x+1)\ge 0$， ………………10 分

不妨设 $h(x)=x-\sin x$，$h'(x)=1-\cos x\ge 0$，所以 h（x）单调递增，

又 x>0，故 h（x）>h（0）=0，所以 $e^{x-\ln x}-x+\ln x-1+x-\sin x>0$，即原不等式得证. …12 分

（注：20 题第（2）问亦可由 $e^x\ge x+1$ 放缩并结合正弦函数有界性证明.）

21．解：（i）抛物线 C：$x^2=4y$ 的焦点为 F（0，1）$\therefore c=1$.

$\because$ 由对称性可知 P、Q 两点关于 y 轴对称，可设 $P(\dfrac{2\sqrt{6}}{3},y_0)$ 代入 C_1 得 $y_0=\dfrac{2}{3}$

P 在椭圆上，设椭圆下焦点为 $F'(0,-1)$ 则 $2a=|PF|+|PF'|=4$ 解得 $a=2,b^2=3$

$\therefore$ 椭圆的方程为 $\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1$． ……………………4 分

（2）设 $M(x_0,y_0)$，则 $\dfrac{y_0^2}{4}+\dfrac{x_0^2}{3}=1,x_0^2=3-\dfrac{3y_0^2}{4}$.

联立 $\begin{cases}x^2=4y\\ \dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{3}=1\end{cases}$，化为 $3y^2+16y-12=0$，$y\in[-2,2]$，解得 $y=\dfrac{2}{3}$，$\therefore y_0\in[-2,\dfrac{2}{3})$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，对 $x^2=4y$ 求导，可得 $y'=\dfrac{1}{2}x$，

$\therefore$ 切线 MA,MB 的方程分别为：$y-\dfrac{x_1^2}{4}=\dfrac{1}{2}x_1(x-x_1),y-\dfrac{x_2^2}{4}=\dfrac{1}{2}x_2(x-x_2)$，…………6 分

又$M(x_0,y_0)$满足上述直线方程，即$y_0-\frac{x_1^2}{4}=\frac{1}{2}x_1(x_0-x_1), y_0-\frac{x_2^2}{4}=\frac{1}{2}x_2(x_0-x_2)$ ，

可得x_1,x_2为方程$t^2-2x_0t+4y_0=0$的两个不等实数根．$\therefore x_1+x_2=2x_0$，$x_1x_2=4y_0$，

$$\therefore k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\frac{x_2^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}{x_2-x_1}=\frac{x_2+x_1}{4}=\frac{x_0}{2}=k\text{，}$$

$\therefore$直线AB的方程为：$y-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_2+x_1}{4}(x-x_1)$，化为$y=\frac{x_2+x_1}{4}x-\frac{x_1x_2}{4}$，

代入可得$y=\frac{x_0}{2}x-y_0$，化为$x_0x-2y-2y_0=0$，　　……………8 分

$\therefore$点M到直线AB的距离$d=\frac{|x_0^2-4y_0|}{\sqrt{x_0^2+4}}$，

$|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{(1+\frac{x_0^2}{4})(4x_0^2-16y_0)}$ ，

$\therefore \Delta MAB$的面积$S=\frac{1}{2}d|AB|=\frac{1}{2}|x_0^2-4y_0|\cdot\sqrt{x_0^2-4y_0}=\frac{1}{2}(x_0^2-4y_0)^{\frac{3}{2}}$，……………10 分

$\because x_0^2-4y_0=3-\frac{3y_0^2}{4}-4y_0=-\frac{3}{4}(y_0+\frac{8}{3})^2+\frac{25}{3}$

又$y_0\in[-2,\frac{2}{3})$，$\therefore$ 当$y_0=-2$时，$\therefore \Delta MAB$的面积取得最大值且最大值为$8\sqrt{2}$．　………12 分

22.（1）$\because$曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=1+\cos\alpha\\ y=1+\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数），消去参数$\alpha$可得：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，

$\therefore$曲线C的普通方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，　　……………2 分

又$\because$直线l的极坐标方程为$\rho\sin\theta-\sqrt{3}\rho\cos\theta+1=0$，且$\rho\sin\theta=y, \rho\cos\theta=x$，

$\therefore$直线l的直角坐标方程为$y-\sqrt{3}x+1=0$,

综上所述：曲线C的普通方程为$x^2+y^2-2x-2y+1=0$；

直线l的直角坐标方程为$\sqrt{3}x-y-1=0$. ………………5 分

（2）由（1）可知：直线l的直角坐标方程为$\sqrt{3}x-y-1=0$，即直线过点$P(0,-1)$，斜率为$\sqrt{3}$，倾斜角为$\frac{\pi}{3}$，则可设直线l的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{1}{2}t\\ y=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$为参数），来源：高三答案公众号

将$\begin{cases}x=\frac{1}{2}t\\ y=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$代入$(x-1)^2+(y-1)^2=1$整理得：$t^2-\left(2\sqrt{3}+1\right)t+4=0$，

设点M,N对应的参数分别为t_1,t_2，判别式$\Delta>0$恒成立，

可得：$t_1+t_2=2\sqrt{3}+1>0,t_1\cdot t_2=4>0$，即$t_1>0,t_2>0$，

$\therefore |PM|+|PN|=|t_1|+|t_2|=t_1+t_2=2\sqrt{3}+1$ ………………10 分

23. （1）因为 a,b,c 为正数，且$a+b+c=3$.

据柯西不等式$(a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2)\geqslant(a\times1+b\times1+c\times1)^2=9$，

所以$a^2+b^2+c^2\geqslant3$，当且仅当$a=b=c=1$时，等号成立. ………………5 分

（2）据柯西不等式$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\geqslant\left(\sqrt{\frac{1}{a}\cdot a}+\sqrt{\frac{1}{b}\cdot b}+\sqrt{\frac{1}{c}\cdot c}\right)^2=9$，所以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant3$，

当且仅当$a=b=c=1$时，等号成立.

所以$m\leq3$故m的最大值为3 ………………10 分

（注：23 题亦可利用基本不等式证明.）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。