全国新课改省区 2021 高三第一次联考数学试题

2021 届 T8 第一次联考数学试题参考答案

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	C	C	D	C	C	D	BC	ABC	BCD	ACD

二、填空题：

13．6　　14．12　　15．3　　16．$(e,+\infty)$

部分选填题解答：

8．解： 对于选项 A：$y=\sinh x\cosh x=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{4}$ 是奇函数，所以 A 错误；

对于选项 B：$\cosh x\cosh y-\sinh x\sinh y=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}-\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}\cdot\dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}$

$=\dfrac{e^{x+y}+e^{-x-y}+e^{x-y}+e^{y-x}}{4}-\dfrac{e^{x+y}+e^{-x-y}-e^{x-y}-e^{y-x}}{4}=\dfrac{e^{x-y}+e^{y-x}}{2}=\cosh(x-y)$，

所以 B 错误；

对于选项 C、D：设 $A(m,\dfrac{e^{m}+e^{-m}}{2})$，$B(m,\dfrac{e^{m}-e^{-m}}{2})$，

则曲线 C_1 在点 A 处的切线方程为：$y-\dfrac{e^{m}+e^{-m}}{2}=\dfrac{e^{m}-e^{-m}}{2}(x-m)$，

曲线 C_2 在点 B 处的切线方程为：$y-\dfrac{e^{m}-e^{-m}}{2}=\dfrac{e^{m}+e^{-m}}{2}(x-m)$，

联立求得点 P 的坐标为 $(m+1,e^{m})$，则 $|BP|^2=1+(e^{m}-\dfrac{e^{m}-e^{-m}}{2})^2=1+\dfrac{(e^{m}+e^{-m})^2}{4}$，

$S_{\Delta PAB}=\dfrac{1}{2}|AB|=\dfrac{1}{2}e^{-m}$，所以 $|BP|$ 随 m 的增大而先减小后增大，ΔPAB 的面积随 m 的增大而减小，所以 C 错误，D 正确．

11．解： 令 $g(x)=(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_7)$，则 $f(x)=xg(x)$，

$\therefore f'(x)=g(x)+xg'(x)$，$\therefore f'(0)=g(0)=a_1a_2\cdots a_7=1$，因为 $\{a_n\}$ 是等比数列，所以 $a_1a_2\cdots a_7=a_4{}^7=1$，即 $a_4=1=a_1q^3$，$\because a_1>1$，$\therefore 0<q<1$，B 正确；

$\because \lg a_n=\lg a_1q^{n-1}=\lg a_1+(n-1)\lg q$，$\therefore \{\lg a_n\}$ 是公差为 $\lg q$ 的递减等差数列，A 错误；

$\because S_n-\dfrac{a_1}{1-q}=\dfrac{a_1}{1-q}(1-q^n-1)=\dfrac{a_1q}{q-1}\cdot q^{n-1}$，$\therefore \{S_n-\dfrac{a_1}{1-q}\}$ 是首项为 $\dfrac{a_1q}{q-1}<0$，公比为 q 的递增等比数列，C 正确；

$\because a_1>1$，$0<q<1$，$a_4=1$，$\therefore n\le 3$ 时，$a_n>1$，$n\ge 5$ 时，$0<a_n<1$，$\therefore n\le 4$ 时，$T_n>1$，

$\because T_7=a_1a_2\cdots a_7=a_4{}^7=1$，$\therefore n\ge 8$ 时，$T_n=T_7a_8a_9\cdots a_n<T_7=1$，又 $T_5=\dfrac{T_7}{a_6a_7}>1$，

$T_6=\dfrac{T_7}{a_7}>1$，所以使得 $T_n>1$ 成立的 n 的最大值为 6，D 正确．

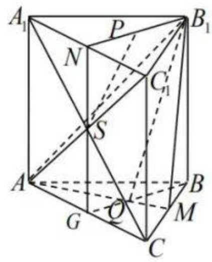
12. 解： 对于选项 A：连接交 NS 交 AC 于 G 点，连接 BG，

则由 $AB=BC$，$AQ=\frac{2}{3}AM$，可得 BG 必过点 Q，且 $BQ=\frac{2}{3}BG$，因为 $PS\subset$ 面 BB_1NG，

PS // 面 AMB_1，面 $AMB_1\cap$ 面 $BB_1NG=B_1Q$，所以 PS // B_1Q，A 正确；

对于选项 B：$\because PS // B_1Q$，$\therefore \angle NPS=\angle NBQ=\angle B_1QB$，$\therefore Rt\Delta PNS\sim Rt\Delta QBB_1$，

$\therefore \frac{PN}{BQ}=\frac{NS}{BB_1}=\frac{1}{2}$，即 $PN=\frac{1}{2}BQ=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}BG=\frac{1}{3}B_1N$，



$\therefore P$ 为靠近 N 的三等分点，B 错误；

对于选项 C：$\because AC\perp NG$，$AC\perp BG$，

$\therefore AC\perp$ 面 BB_1NG，$\therefore AC\perp PS$，C 正确；

对于选项 D：$\because B_1P // BQ$，且 $B_1P=BQ$，$\therefore BB_1PQ$ 是矩形，

$\therefore V_{P-AB_1M}=V_{B-AB_1M}=V_{B_1-ABM}=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=\frac{2}{3}$，D 正确.

15. 解： $\because a=c(\cos B+\sqrt{3}\cos C)$，$\therefore \sin A=\sin C(\cos B+\sqrt{3}\cos C)$，

$\therefore \sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，

化简得 $\cos C\sin B=\sqrt{3}\sin C\cos C$，$\because \Delta ABC$ 非直角三角形，$\therefore \cos C\neq 0$，

$\therefore \sin B=\sqrt{3}\sin C$，即 $b=\sqrt{3}c$，

$\therefore S=\sqrt{\frac{1}{4}[c^2a^2-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-4c^4+72c^2-81}{4}}$，当且仅当 $c^2=9$，即 $c=3$ 时，S 有最大值.

16. 解： $\because f(x)=ae^x+\ln\frac{a}{x+2}-2>0$，则 $e^{x+\ln a}+\ln a>\ln(x+2)+2$，

两边加上 x 得到 $e^{x+\ln x}+x+\ln a>x+2+\ln(x+2)=e^{\ln(x+2)}+\ln(x+2)$，$\because y=e^x+x$ 单调递增，$\therefore x+\ln a>\ln(x+2)$，即 $\ln a>\ln(x+2)-x$，

令 $g(x)=\ln(x+2)-x$，则 $g'(x)=\frac{1}{x+2}-1=\frac{-x-1}{x+1}$，$\therefore x\in(-2,-1)$ 时，$g'(x)>0$，

$g(x)$ 单调递增，$x\in(-1,+\infty)$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

$\therefore \ln a>g(x)_{\max}=g(-1)=1$，$\therefore a>e$.

四、解答题：

17. 解：（1）设等差数列的公差为 d，等比数列的公比为 q，$\because a_2=a_3-b_3$，$a_3=S_3+b_2$，

$\therefore \begin{cases} d=q^2 \\ 1+2d=1+q+q^2+q \end{cases}$，解得：$\begin{cases} q=2 \\ d=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} q=0 \\ d=0 \end{cases}$（舍去），

$\therefore a_n=4n-3$，$b_n=2^{n-1}$. ……………………………4 分

（2）$\because \{a_n\}$ 是等差数列，所以 $a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$，又由（1）知：$b_{n+2}=2b_{n+1}$，

$\therefore c_n=\frac{a_nb_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{(2a_{n+1}-a_{n+2})b_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{2b_{n+1}}{a_{n+2}}-\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}=\frac{b_{n+2}}{a_{n+2}}-\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$，……………6 分

$\therefore T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\frac{b_{n+2}}{a_{n+2}}-\frac{b_2}{a_2}=\frac{2^{n+1}}{4n+5}-\frac{2}{5}$，$\therefore \frac{5}{5T_n+2}=\frac{4n+5}{2^{n+1}}$， ……8 分

则 $S_n'=9(\frac{1}{2})^2+13(\frac{1}{2})^3+\cdots+(4n+5)(\frac{1}{2})^{n+1}$ ①

$\frac{1}{2}S_n'=9(\frac{1}{2})^3+13(\frac{1}{2})^4+\cdots+(4n+5)(\frac{1}{2})^{n+2}$ ②

由①－②得：

$\frac{1}{2}S_n'=9(\frac{1}{2})^2+4[(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^4+\cdots+(\frac{1}{2})^{n+1}]-(4n+5)(\frac{1}{2})^{n+2}$

$=5(\frac{1}{2})^2+4\cdot\frac{\frac{1}{4}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}-(4n+5)(\frac{1}{2})^{n+2}=\frac{5}{4}+2[1-(\frac{1}{2})^n]-(4n+5)(\frac{1}{2})^{n+}$

$=\frac{13}{4}-(4n+13)(\frac{1}{2})^{n+2}$，

$\therefore S_n'=\frac{13}{2}-(4n+13)(\frac{1}{2})^{n+1}$． ……………………………10 分

18. 解：(1) 因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π，$\therefore \frac{2\pi}{\omega}=\pi$，$\therefore \omega=2$， ………2 分

$\because f(x)$ 的图像是由 $y=\sqrt{2}\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到，

$\therefore f(x)=\sqrt{2}\sin[\omega(x-\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{3}]$，即 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{3})$， ………4 分

令 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，得 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}$，$k\in Z$，…5 分

要使直线 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}$（$k\in Z$）与 y 轴距离最近，则须 $|\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}|$ 最小，

$\therefore k=-1$，此时对称轴方程为 $x=-\frac{\pi}{12}$，即所求对称轴方程为 $x=-\frac{\pi}{12}$． ……6 分

(2) 由已知得：$f(x)=\sqrt{2}\sin[\omega(x-\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{3}]$，

令 $f(x)=0$ 得：$\omega x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\omega=k\pi,k\in Z$，即 $x=\frac{k\pi+\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{3}}{\omega},k\in Z$， ……8 分

$\because f(x)$在$[\frac{\pi}{2},\pi]$上仅有一个零点，$\therefore \begin{cases} \frac{\pi}{2}\le \dfrac{k\pi+\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{3}}{\omega}\le\pi \\ \dfrac{(k-1)\pi+\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{3}}{\omega}<\frac{\pi}{2} \\ \dfrac{(k+1)\pi+\frac{\pi}{3}\omega-\frac{\pi}{3}}{\omega}>\pi \end{cases}, k\in Z$，$\because \omega>0$，

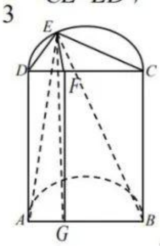
$\therefore \begin{cases} \frac{3k-1}{2}\le\omega\le 6k-2 \\ \omega>6k-8 \\ \omega<\frac{3k+2}{2} \end{cases}$，$\because \omega>0$，$\therefore \begin{cases} 6k-2>0 \\ \frac{3k-1}{2}\le 6k-2 \\ 6k-8<\frac{3k+2}{2} \end{cases}$，解得：$\frac{1}{3}\le k<2$，

$\because k\in Z$，$\therefore k=1$，$\therefore 1\le\omega<\frac{5}{2}$. ……12 分

19. 解：（1）在平面EDC内作$EF\perp CD$于点F，因为平面$ABCD\perp$平面EDC，平面$ABCD\cap$平面$EDC=DC$，所以$EF\perp$平面$ABCD$， ……2 分

因为E为半圆弧CD上一点，所以$CE\perp ED$，

所以$V_{E-ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot EF=\frac{1}{3}\times\sqrt{5}\times2\sqrt{5}\times\frac{CE\cdot ED}{CD}=\frac{2\sqrt{5}}{3}\cdot CE\cdot ED$， ……4 分



因为$CE^2+ED^2=CD^2=5$，

$\therefore V_{E-ABCD}\le\frac{2\sqrt{5}}{3}\times\frac{CE^2+ED^2}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{5\sqrt{5}}{3}$，

当且仅当$CE=ED=\frac{\sqrt{10}}{2}$时等号成立，

所以四棱锥$E-ABCD$的体积的最大值为$\frac{5\sqrt{5}}{3}$. ……6 分

（2）由条件①得：$4|\overrightarrow{DE}||\overrightarrow{DC}|\cos\angle CDE=|\overrightarrow{CE}||\overrightarrow{DC}|\cos\angle DCE$，即$4DE^2=CE^2$，所以$2DE=CE$，又因为$DE^2+CE^2=5$，所以$DE=1$，$CE=2$，

由条件②得：因为$AD//BC$，$BC\perp$平面DCE，所以$\angle CBE$为直线AD与BE所成角，且$\sin\angle CBE=\frac{2}{3}=\frac{CE}{BE}$，$\frac{CE}{BC}=\tan\angle CBE=\frac{2}{\sqrt{5}}$，

由条件③得：$\frac{\sin\angle EAB}{\sin\angle EBA}=\frac{EB}{EA}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，设$AD=x$，则$\frac{x^2+CE^2}{x^2+DE^2}=\frac{3}{2}$，

若选条件①②，则 $DE=1$，$CE=2$，且 $\frac{CE}{BC}=\tan\angle CBE=\frac{2}{\sqrt{5}}$，所以 $AD=BC=\sqrt{5}$，

若选条件①③，则 $DE=1$，$CE=2$，且 $\frac{x^2+CE^2}{x^2+DE^2}=\frac{3}{2}$，所以 $AD=BC=x=\sqrt{5}$，

若选条件②③，则 $\frac{CE}{x}=\tan\angle CBE=\frac{2}{\sqrt{5}}$，且 $\frac{x^2+CE^2}{x^2+DE^2}=\frac{3}{2}$，$DE^2+CE^2=5$，

所以 $AD=BC=x=\sqrt{5}$，

即从①②③任选两个作为条件，都可以得到 $AD=BC=\sqrt{5}$，……9 分

下面求 AD 与平面 EAB 所成角的正弦值：

方法一： 设点 D 到平面 EAB 的距离为 h，AD 与平面 EAB 所成角为 θ，则由

$V_{D-EAB}=V_{E-DAB}$ 得：$h\cdot S_{\Delta EAB}=EF\cdot S_{\Delta DAB}=\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}$，所以 $h=\frac{\sqrt{5}}{S_{\Delta EAB}}$，

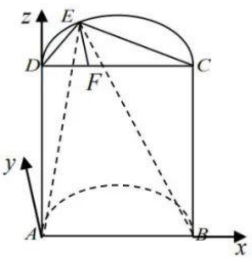
作 $FG\perp AB$ 于点 G，连接 EG，则由 $EF\perp$ 平面 $ABCD$ 知 FG 是 EG 在平面 $ABCD$ 内的射影，所以 $EG\perp AB$，

$\therefore S_{\Delta EAB}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot EG=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{EF^2+FG^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{(\frac{2}{\sqrt{5}})^2+(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$，

$\therefore h=\frac{\sqrt{5}}{S_{\Delta EAB}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{29}}$，$\therefore\sin\theta=\frac{h}{AD}=\frac{2}{\sqrt{29}}$，

所以 AD 与平面 EAB 所成角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{29}}{29}$． ……12 分

方法二： 以 A 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $B(\sqrt{5},0,0)$，$D(0,0,\sqrt{5})$，$E(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5},\sqrt{5})$，

$\therefore\overrightarrow{AE}=(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5},\sqrt{5})$，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{5},0,0)$，

设平面 EAB 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\frac{\sqrt{5}}{5}x+\frac{2\sqrt{5}}{5}y+\sqrt{5}z=0\\ \sqrt{5}x=0\end{cases}$，

令 $z=1$，则 $\vec{m}=(0,-\frac{5}{2},1)$，$\therefore\cos<\overrightarrow{AD},\vec{m}>=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{1+\frac{25}{4}}}=\frac{2}{\sqrt{29}}$，

$\because AD$ 与平面 EAB 所成角 $=\frac{\pi}{2}-<\overrightarrow{AD},\vec{m}>$，

所以 AD 与平面 EAB 所成角的余弦值为 $\frac{5\sqrt{29}}{29}$．

20. 解：（1）由频数分布表得：

$$\bar{x}=\frac{14\times5+17\times6+20\times9+23\times12+26\times8+29\times6+32\times4}{50}=22.76\approx22.8,$$

所以这 50 个社区这一天垃圾量的平均值为 22.8 吨． ……3 分

（2）由（1）知 $\mu=22.8$，$\because s=5.2$，$\therefore\sigma=s=5.2$，

$\therefore P(X>28)=P(X>\mu+\sigma)=\dfrac{1-0.6827}{2}=0.15865$， ……5 分

$\because 320\times0.15865=50.768\approx51$，

所以这 320 个社区中 “超标”社区的个数为 51． ……7 分

（3）由频数分布表知：8 个“超标”社区中这一天的垃圾量至少为 30.5 吨的社区有 4 个，

所以 Y 的可能取值为 $1,2,3,4$，且 $P(Y=1)=\dfrac{C_4^1C_4^4}{C_8^5}=\dfrac{1}{14}$，$P(Y=2)=\dfrac{C_4^2C_4^3}{C_8^5}=\dfrac{3}{7}$，

$P(Y=3)=\dfrac{C_4^3C_4^2}{C_8^5}=\dfrac{3}{7}$，$P(Y=4)=\dfrac{C_4^4C_4^1}{C_8^5}=\dfrac{1}{14}$， ……10 分

所以 Y 的分布列为：

Y	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

$\therefore E(Y)=1\times\dfrac{1}{14}+2\times\dfrac{3}{7}+3\times\dfrac{3}{7}+4\times\dfrac{1}{14}=\dfrac{5}{2}$． ……12 分

21. 解：（1）$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与 $y^2=4x$ 有相同的焦点，所以 $a^2-b^2=1$ ①，

又$\because$抛物线的准线被椭圆截得的弦长为 3，$\therefore\dfrac{2b^2}{a}=3$ ②，

解①②得 $a=2$，$b=\sqrt{3}$，所以曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$． ……4 分

（2）设直线 $AB:y=k(x-1)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立直线与椭圆方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=k(x-1)\end{cases}$，消去 y 得：$(3+4k^2)x-8k^2x+4k^2-12=0$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$， ……6 分

$\therefore\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{4k^2}{3+4k^2}$，$\therefore\dfrac{y_1+y_2}{2}=k(\dfrac{x_1+x_2}{2}-1)=\dfrac{-3k}{3+4k^2}$，

$\therefore P$ 的坐标为 $(\dfrac{4k^2}{3+4k^2},\dfrac{-3k}{3+4k^2})$，直线 $OP:y=-\dfrac{3}{4k}x$ ③， ……7 分

直线 AB 方程 $y=k(x-1)$ 中令 $x=0$ 得 $y=-k$，$\therefore E$ 的坐标为 $(0,-k)$，

因为直线 $EQ\perp OP$，$\therefore EQ$ 的直线方程为 $y=\frac{4k}{3}x-k$ ④， ……8 分

将③④联立相乘得到 $y^2=-x^2+\frac{3}{4}x$，即 $(x-\frac{3}{8})^2+y^2=\frac{9}{64}$，

所以点 Q 的轨迹为以 $(\frac{3}{8},0)$ 为圆心，$\frac{3}{8}$ 为半径的圆， ……10 分

所以存在定点 $H(\frac{3}{8},0)$，使得 QH 的长为定值 $\frac{3}{8}$． ……12 分

22．解：（1）当 $m=1$ 时，$f(x)=\frac{\ln x+1}{x^2}$，$\therefore f'(x)=-\frac{2\ln x+1}{x^3}$， ……………1 分

令 $f'(x)=0$，得 $x=e^{-\frac{1}{2}}$，$\therefore 0<x<e^{-\frac{1}{2}}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，$x>e^{-\frac{1}{2}}$ 时，

$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$\therefore f(x)_{\max}=f(e^{-\frac{1}{2}})=\frac{e}{2}$． …………………4 分

（2）由 $f(x)=m-\ln x$ 得 $\ln x-\frac{m(x^2-1)}{x^2+1}=0$，令 $g(x)=\ln x-\frac{m(x^2-1)}{x^2+1}$，

所以方程 $f(x)=m-\ln x$ 的实根的个数即为函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的零点的个数，

$\because g(1)=0$，$\therefore x=1$ 是函数 $g(x)$ 的一个零点， ………………5 分

又 $\because g(\frac{1}{x})=\ln\frac{1}{x}-\frac{m(\frac{1}{x^2}-1)}{\frac{1}{x^2}+1}=-\ln x+\frac{m(x^2-1)}{x^2+1}=-g(x)$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)\cup(1,+\infty)$ 上

的零点互为倒数，下面先研究 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上的零点的个数：

$\because g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4mx}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)^2-4mx^2}{x(x^2+1)^2}(x>1)$， ………………6 分

（i）若 $m\le 0$，则 $x>1$ 时，$g(x)=\ln x-\frac{m(x^2-1)}{x^2+1}>0$，$\therefore g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上的没有零点； ………………7 分

（ii）若 $m>0$，则 $g'(x)=\frac{(x^2+1)^2-4mx^2}{x(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+2\sqrt{m}x+1)(x^2-2\sqrt{m}x+1)}{x(x^2+1)^2}(x>1)$，

令 $h(x)=x^2-2\sqrt{m}x+1(x>1)$，

①$\Delta=4m-4\le 0$，即 $0<m\le 1$ 时，$h(x)\ge 0$，$\therefore g'(x)\ge 0$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增，

$\therefore g(x)>g(1)=0$，$\therefore g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上的没有零点； ………………9 分

②$\Delta=4m-4>0$，即 $m>1$ 时，$h(x)=0$ 有两个不等实根 x_1,x_2，且 $x_1x_2=1$，

$\therefore$ 大根 $x_2=\sqrt{m}+\sqrt{m-1}>1$，小根 $0<x_1<1$，

$\therefore x\in(1,x_2)$ 时，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，$x\in(x_2,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，

$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，$\therefore g(x_2)<g(1)=0$，

又$\because g(e^m)=m-\dfrac{m(e^{2m}-1)}{e^{2m}+1}=\dfrac{2m}{e^{2m}+1}>0$，$\therefore g(x)$在$(1,x_2)$上恒小于 0，在$(x_2,+\infty)$上存在唯一$x_0\in(x_2,e^m)$使得$g(x_0)=0$，$\therefore g(x)$在$(1,+\infty)$上仅有一个零点$x_0$，……11 分

因为$g(x)$在$(0,1)\cup(1,+\infty)$上的零点互为倒数，且$g(1)=0$，所以$m\le1$时，$g(x)$仅有一个零点；$m>1$时，$g(x)$有三个零点.

综上：$m\le1$时，方程$f(x)=m-\ln x$仅有一个实根；

$m>1$时，方程$f(x)=m-\ln x$有三个实根.　　……………12 分

参考解法二： 由$f(x)=m-\ln x$得$\ln x-\dfrac{m(x^2-1)}{x^2+1}=0$，$x=1$显然是该方程的一个根；　　………………5 分

$x\ne1$时，方程等价于$m=\dfrac{(x^2+1)\ln x}{x^2-1}$，令$h(x)=\dfrac{(x^2+1)\ln x}{x^2-1}(x>0,x\ne1)$，

则$h'(x)=\dfrac{x^4-1-4x^2\ln x}{x(x^2-1)^2}=-\dfrac{x}{(x^2-1)^2}(4\ln x-x^2+\dfrac{1}{x^2})$，　　……………6 分

令$\varphi(x)=4\ln x-x^2+\dfrac{1}{x^2}$，则$\varphi'(x)=\dfrac{4}{x}-2x-\dfrac{2}{x^3}=-\dfrac{2(x^2-1)^2}{x^3}<0$，

$\therefore x>0$时，$\varphi(x)$单调递减，　　……………7 分

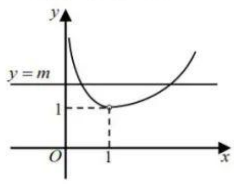
$\therefore 0<x<1$时，$\varphi(x)>\varphi(1)=0$，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，$x>1$时，$\varphi(x)<\varphi(1)=0$，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，　　……………8 分

由$x\to+\infty$时，$h(x)\to+\infty$，

$x\to0$时，$h(x)\to+\infty$

$x\to1$时，$h(x)\to1$，

可画出$h(x)$的大致图像如图所示：



（注：此处用到了高中教材中没有涉及到的函数极限知识，可酌情扣 2—3 分）

结合图像得：$m>1$时，方程$m=h(x)$有两个实根；$m\le1$时，方程$m=h(x)$没有实根；

综合得：$m\le1$时，方程$f(x)=m-\ln x$仅有一个实根；

$m>1$时，方程$f(x)=m-\ln x$有三个实根.　　……………12 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承"专业、专注、有态度"的创办理念，不断探索"K12 教育+互联网+大数据"的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供"衔接和桥梁纽带"作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网"年度口碑影响力在线教育品牌"。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。

微信搜一搜
自主选拔在线