七校联合体2021届高三第一次联考试卷（8月）

数学答案

第Ⅰ卷选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	C	B	A	D	B	D	BC	AD	CD	ABD

7.解析因为点P是曲线 $y=x^2-\ln x-1$ 任意一点，所以当点P处的切线和直线 y=x−2 平行时，点P到直线 y=x−2 的距离最小．

因为直线 y=x−2 的斜率等于1，曲线 $y=x^2-\ln x-1$ 的导数 $y'=2x-\frac{1}{x}$．

令 $y'=1$，可得 x=1 或 $x=-\frac{1}{2}$（舍去），所以在曲线 $y=x^2-\ln x-1$ 与直线 y=x−2 平行的切线经过的切点坐标为(1，0)．

所以点P到直线 y=x−2 的最小距离为 $d=\frac{|1-0-2|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．故选：B

8．分两类：①甲送D箱，有 $C_4^1\bullet\frac{1}{2}C_4^2\bullet C_2^1\bullet C_2^2$ 种；②甲不送D箱，有 $C_4^2\bullet C_3^2\bullet C_2^2$．

∴不同的分配方案共有 $C_4^1\bullet\frac{1}{2}C_4^2\bullet C_2^1\bullet C_2^2+C_4^2\bullet C_3^2\bullet C_2^2=42$（种），选（D）．

9.解：A．p 不是 q 的充分条件，也不是必要条件；B．p 是 q 的充分条件，不是必要条件；C．p 是 q 的充要条件；D.必要不充分　答案BC

10.答案AD 由题意得 $a_9>1>a_{10}>a_{11}\cdots$

11.答案CD　(1)由图显然 AM、BN 是异面直线，故 A、M、N、B 四点不共面，故A错误；

(2) BN // 平面 AA_1D_1D，显然 BN 与平面 ADM 不平行，故B错误；

(3)取 CD 的中点 O，连接 BO、ON，可知三角形 BON 为等边三角形，故C正确；

(4)由题意 $AD\perp$ 平面 CDD_1C_1，故平面 $ADM\perp$ 平面 CDD_1C_1，故D正确；

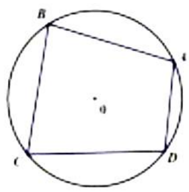
12.答案ABD【解析】$\because AB=CD=5,AD=3,\angle BCD=60^\circ\ \therefore\angle BAD=120^\circ$

可证 $\Delta BAD\cong\Delta CDA\ \therefore\angle BAD=\angle CDA=120^\circ$

$\therefore\angle BCD+\angle CDA=180^\circ\ \therefore BC//DA$

显然 AB 不平行 CD 即四边形 $ABCD$ 为梯形，故 A 正确；

在 ΔBCD 中由余弦定理可得



$BD^2=CB^2+CD^2-2CB\cdot CD\cos\angle BCD$

$\therefore 7^2=CB^2+5^2-2\times5\times CB\cos60°$ 解得 $CB=8$ 或 $CB=-3$（舍去）

$\therefore S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin120°=\frac{1}{2}\times5\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

$\therefore S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}CB\cdot CD\sin60°=\frac{1}{2}\times5\times8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{40\sqrt{3}}{4}$

$\therefore S_{ABCD}=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle ABD}=\frac{15\sqrt{3}}{4}+\frac{40\sqrt{3}}{4}=\frac{55\sqrt{3}}{4}$ 故 B 正确

在 $\triangle BAD$ 中由余弦定理可得 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle BAD$

$\therefore BD^2=5^2+3^2-2\times5\times3\cos120°=49$ $\therefore BD=7$ $\therefore$ 圆的直径不可能是 7，故 C 错误；

在 $\triangle ABD$ 中，$AD=3$，$AB=5$，$BD=7$，满足 $AD+BD=2AB$

$\therefore\triangle ABD$ 的三边长度可以构成一个等差数列，故 D 正确；

第Ⅱ卷非选择题

13、解：双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的右焦点为 $(2,0)$，所以抛物线 $y^2=2px$ 的焦点为 $(2,0)$，则 $p=4$。

14 解：随机变量 $\xi\sim N$（2,1）所以正态曲线关于 $\xi=2$ 对称

所以 $P(\xi\ge3)=P$（$\xi\le1$）$=1-P$（$\xi\ge1$）$=1-0.8413=0.1587$

15、解析：$f(x)=-\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x+\varphi)$，则 $f(x)+f'(x)=$

$\cos(\sqrt{3}x+\varphi)-\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x+\varphi)=2\sin(\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}x-\varphi)$

$=2\cos(\sqrt{3}x+\varphi+\frac{\pi}{3})$ 为偶函数，$\therefore\ \varphi=\frac{2\pi}{3}$.

16、$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $r=5$，球的半径为 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$，表面积为 $\frac{400\pi}{3}$

17、解：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=p-1+q$ ············ 1 分

当 $n\ge2$ 时 $a_n=S_n-S_{n-1}=pn^2-n+q-p(n-1)^2+(n-1)-q=2pn-p-1$ ············ 2 分

$\because\{a_n\}$ 是等差数列，$a_1=p-1+q=2p-p-1$ $\therefore q=0$ · ············ 4 分

2

(II)解：∵ $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_3=\frac{a_1+a_5}{2}=14=6p-p-1$

$\therefore p=3 \quad \therefore a_n=6n-4$ …………6分

又 $a_n=2\log_2 b_n \therefore b_n=2^{3n-2}$ …………8分

$\therefore b_1=2, \frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2^{3n+1}}{2^{3n-2}}=8$ 即 $\{b_n\}$ 是等比数列.

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\frac{2(1-8^n)}{1-8}=\frac{2}{7}(8^n-1)$ …………10

18 解：(1)

$\because AB=AD \therefore \angle ADB=\angle ABC=\alpha$

$\because \angle BAC=\frac{\pi}{2} \therefore \angle DAB=\pi-2\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta \therefore \beta=2\alpha-\frac{\pi}{2}$. …………3分

$\therefore \cos 2\alpha+\sin\beta=\cos 2\alpha+\sin(2\alpha-\frac{\pi}{2})=\cos 2\alpha-\cos 2\alpha=0$ …………6分

(2) 在 ΔACD 中，根据正弦定理 $\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{DC}{\sin\angle CAD}$ 即 $\frac{AC}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{DC}{\sin\beta}$

若 $AC=\sqrt{3}DC$ $\quad\therefore \sqrt{3}\sin\beta=\sin\alpha$ …………8分

由(1)得 $\sin\beta=-\cos 2\alpha \therefore -\sqrt{3}\cos 2\alpha=2\sqrt{3}\sin^2\alpha-\sqrt{3}=\sin\alpha$

$2\sqrt{3}\sin^2\alpha-\sin\alpha-\sqrt{3}=0$ 即 $(2\sin\alpha-\sqrt{3})(\sqrt{3}\sin\alpha+1)=0$ …………10分

又因为在直角△ABC中 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2}) \therefore \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ …………11分

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{3}$. …………12分

19 证明：以 D 为原点，$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DS}$ 的方向分别作为 x、y、z 轴的正方向建立如图 2 所示的空间直角坐标系，则

D（0，0，0），A($\sqrt{2}a$, 0, 0)，B（$\sqrt{2}a$，$\sqrt{2}a$，0），C（0，$\sqrt{2}a$，0），E（0，0 λa）.

$\therefore \overrightarrow{AC}=(-\sqrt{2}a,\sqrt{2}a,0), \overrightarrow{BE}=(-\sqrt{2}a,-\sqrt{2}a,\lambda a)$

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=2a^2-2a^2+0\cdot\lambda a=0$.

即 $AC\perp BE$. …………4分

（2）由（1）得 $\overrightarrow{EA}=(\sqrt{2}a,0,-\lambda a), \overrightarrow{EC}=(0,\sqrt{2}a,-\lambda a), \overrightarrow{BE}=(-\sqrt{2}a,-\sqrt{2}a,\lambda a)$.

3

设平面ACE的法向量为n=(x，y，z)，则由$n\perp\overline{EA}$，$n\perp\overline{EC}$得

$$\begin{cases} n\cdot\overline{EA}=0, \\ n\cdot\overline{EC}=0, \end{cases}\text{即}\begin{cases} \sqrt{2}x-\lambda z=0, \\ \sqrt{2}y-\lambda z=0, \end{cases}$$

取$z=\sqrt{2}$，得$\vec{n}=(\lambda,\lambda,\sqrt{2})$ ··········6分

易知平面ABCD与平面ADE的一个法向量分别为$\overline{DS}=(0,0,2a)$与$\overline{DC}=(0,\sqrt{2}a,0)$.

$$\therefore \sin\varphi=\frac{\overline{DS}\cdot\overline{BE}}{|\overline{DS}|\cdot|\overline{BE}|}=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+4}},\cos\theta=\frac{|\overline{DC}\cdot n|}{|\overline{DC}|\cdot|n|}=\frac{|\lambda|}{\sqrt{2\lambda^2+2}}$$

··········10分

$$\sin\varphi=\cos\theta\text{即}\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+4}}=\frac{\lambda}{\sqrt{2\lambda^2+2}}\Leftrightarrow\lambda^2=2.$$

由于$\lambda\in(0,2]$，解得$\lambda=\sqrt{2}$，即为所求。 ··········12分

图1

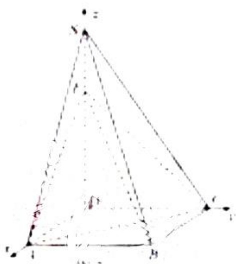


图2

（解法二）证明：如图1，连接BE、BD，由底面ABCD是正方形可得AC⊥BD。

∵SD⊥平面ABCD，∴BD是BE在平面ABCD上的射影，∴AC⊥BE ··········4分

（II）如图1，由SD⊥平面ABCD知，∠DBE=φ，

∵SD⊥平面ABCD，CD⊂平面ABCD，∴SD⊥CD。

又底面ABCD是正方形，∴CD⊥AD，而SD∩AD=D，CD⊥平面SAD.

连接AE、CE，过点D在平面SAD内作DE⊥AE于F，连接CF，则CF⊥AE.

故∠CFD是二面角C-AE-D的平面角，即∠CFD=θ。

在Rt△BDE中，∵BD=2a，DE=λa，$BE=\sqrt{4a^2+\lambda^2a^2}$，$\sin\varphi=\frac{DE}{BE}=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+4}}$

在Rt△ADE中，∵$AD=\sqrt{2}a,DE=\lambda a$，∴$AE=a\sqrt{\lambda^2+2}$

从而 $DF=\dfrac{AD\cdot DE}{AE}=\dfrac{\sqrt{2}\lambda a}{\sqrt{\lambda^2+2}}$

在 Rt△CDF 中，$CF=\sqrt{DF^2+CD^2}=\dfrac{2\sqrt{\lambda^2+1}}{\sqrt{\lambda^2+2}}a$．　　$\therefore\cos\theta=\dfrac{DF}{CF}=\dfrac{\lambda}{\sqrt{2\lambda^2+2}}$

$\sin\varphi=\cos\theta$ 即 $\dfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+4}}=\dfrac{\lambda}{\sqrt{2\lambda^2+2}}\Leftrightarrow\lambda^2=2$

由 $\lambda\in(0,2]$，解得 $\lambda=\sqrt{2}$，即为所求.

20(I)解法 1：ξ_1 的概率分布为

ξ_1	1.2	1.18	1.17
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$E\xi_1=1.2\times\frac{1}{6}+1.18\times\frac{1}{2}+1.17\times\frac{1}{3}=1.18$.　　　　………2 分

由题设得 $\xi\sim B(2,p)$，则 ξ 的概率分布为

ξ	0	1	2
P	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

故 ξ_2 的概率分布为

ξ	1.3	1.25	0.2
P	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

所以 ξ_2 的数学期望为

$E\xi_2=1.3\times(1-p)^2+1.25\times2p(1-p)+0.2\times p^2=-p^2-0.1p+1.3$.　　　　………8 分

(II)　由 $E\xi_1<E\xi_2$，得：

$-p^2-0.1p+1.3>1.18\Rightarrow(p+0.4)(p-0.3)<0\Rightarrow-0.4<p<0.3$

因 0<p<1，所以 $E\xi_1<E\xi_2$ 时，p 的取值范围是 0<p<0.3.　　　　………12 分

解法 2：ξ_1 的概率分布同解法一；　ξ_2 的概率分布解法如下

设 A_i 表示事件"第 i 次调整，价格下降"（i=1，2），则

5

$P(\xi=0)=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})=(1-p)^2$；

$P(\xi=1)=P(\overline{A_1})P(A_2)+P(A_1)P(\overline{A_2})=2p(1-p)$；

$P(\xi=2)=P(A_1)P(A_2)=p^2$

故ξ_2的概率分布为

ξ	1.3	1.25	0.2
P	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

所以ξ_2的数学期望为

$E\xi_2=1.3\times(1-p)^2+1.25\times2p(1-p)+0.2\times p^2=-p^2-0.1p+1.3$.

21 解： 设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>c)$

（I）由已知得$\begin{cases}b=c\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=2\\ b^2=1\\ c^2=1\end{cases}$ $\therefore$所求椭圆方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ····4 分

（II）解法一：由题意知直线l的斜率存在，设直线l的方程为$y=kx+2$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$

由$\begin{cases}y=kx+2\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，消去$y$得关于$x$的方程：$(1+2k^2)x^2+8kx+6=0$

由直线l与椭圆相交于 A、B 两点，$\therefore\Delta>0\Rightarrow64k^2-24(1+2k^2)>0$ 解得$k^2>\dfrac{3}{2}$

又由韦达定理得$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{8k}{1+2k^2}\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{6}{1+2k^2}\end{cases}$

$\therefore|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{1+2k^2}\sqrt{16k^2-24}$

原点O到直线l的距离$d=\dfrac{2}{\sqrt{1+k^2}}$

6

$\because S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{\sqrt{16k^2-24}}{1+2k^2}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{2k^2-3}}{1+2k^2}$.

解法 1：令 $m=\sqrt{2k^2-3}(m>0)$． 则 $2k^2=m^2+3$

$\therefore S=\frac{2\sqrt{2}m}{m^2+4}=\frac{2\sqrt{2}}{m+\frac{4}{m}}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ 当且仅当 $m=\frac{4}{m}$ 即 $m=2$ 时，$S_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

此时 $k=\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$．所以，所求直线方程为 $\pm\sqrt{14}-2y+4=0$ ········ 12 分

解法 2：对 $S=\frac{\sqrt{16k^2-24}}{1+2k^2}$ 两边平方整理得：$4S^2k^4+4(S^2-4)k^2+S^2+24=0$ (*)

$\because S\neq 0$，

$$\begin{cases}16(S^2-4)^2-4\times 4S^2(S^2+24)\ge 0,\\ \frac{4-S^2}{S^2}>0\\ \frac{S^2+24}{4S^2}>0\end{cases}$$ 整理得：$S^2\le\frac{1}{2}$

又 $S>0$， $\therefore 0<S\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ 从而 $S_{\triangle AOB}$ 的最大值为 $S=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

此时代入方程（*）得 $4k^4-28k^2+49=0$ $\therefore k=\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$

所以，所求直线方程为：$\pm\sqrt{14}x-2y+4=0$．

解法二：由题意知直线 l 的斜率存在且不为零．设直线 l 的方程为 $y=kx+2$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$，

则直线 l 与 x 轴的交点 $D(-\frac{2}{k},0)$．

由解法一知 $k^2>\frac{3}{2}$ 且 $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{8k}{1+2k^2}\\ x_1\cdot x_2=\frac{6}{1+2k^2}\end{cases}$．

解法 1：$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OD|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}|\frac{2}{k}|\cdot|kx_1+2-kx_2-2|=|x_1-x_2|$

7

$$=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{16k^2-24}}{1+2k^2}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{2k^2-3}}{1+2k^2}.$$

下同解法一.

解法2：$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle POB}-S_{\triangle POA}=\frac{1}{2}\times 2\times||x_2|-|x_1||=|x_2-x_1|=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{2k^2-3}}{1+2k^2}$

下同解法一. ……… 12 分

22【解析】(1) $f'(x)=3x^2e^{ax}+ax^3e^{ax}=x^2e^{ax}(ax+3)$.

①当$a=0$时，$f'(x)\geq 0$恒成立，所以$f(x)$在R单调递增.

②当$a<0$时，令$f'(x)<0$，得$x>-\frac{3}{a}$；令$f'(x)\geq 0$，得$x\leq -\frac{3}{a}$.

所以$f(x)$的单调递减区间为$\left(-\frac{3}{a},+\infty\right)$，单调递增区间为$\left(-\infty,-\frac{3}{a}\right]$.

③当$a>0$时令$f'(x)\geq 0$，得$x\geq -\frac{3}{a}$；令$f'(x)<0$，得$x<-\frac{3}{a}$.

所以$f(x)$的单调递减区间为$\left(-\infty,-\frac{3}{a}\right)$，单调递增区间为$\left[-\frac{3}{a},+\infty\right)$. ……… 6 分

(2) 因为$a=2$，所以$f(x)\geq mx+3\ln x$对$x\in(0,+\infty)$恒成立等价于$m\leq\frac{x^3e^{2x}-3\ln x-1}{x}$对

$x\in(0,+\infty)$恒成立.设$g(t)=t-1-\ln t(t>0)$，$g'(t)=\frac{t-1}{t}$，

令$g'(t)<0$，得$0<t<1$；令$g'(t)>0$，得$t>1$.

所以$g(t)_{min}=g(1)=0$，所以$t-1-\ln t\geq 0$.取$t=x^3e^{2x}$，

则$x^3e^{2x}-1-\ln\left(x^3e^{2x}\right)\geq 0$，即$x^3e^{2x}-3\ln x-1\geq 2x$，

所以$\frac{x^3e^{2x}-3\ln x-1}{x}\geq\frac{2x}{x}=2$.

设$h(x)=x^3e^{2x}$，因为$h(0)=0<1$，$h(1)=e^2>1$，所以方程$x^3e^{2x}=1$必有解.

所以当且仅当$x^3e^{2x}=1$时，函数$y=\frac{x^3e^{2x}-3\ln x-1}{x}(x>0)$有最小值，且最小值为2，所以$m\leq 2$，

即m的取值范围为$(-\infty,2]$. ……… 12 分