沈阳二中2022—2023学年度下学期第五次模拟考试

高三（23届）数学试题

命题人：高三数学组　　审校人：高三数学组

说明：1.测试时间：120分钟　总分：150分

2.考生务必将答案答在答题卡相应位置上，在试卷上作答无效。

第Ⅰ卷（选择题，共60分）

一.单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设集合 $A=\left\{x\in \mathrm{N}^{*} \mid \sqrt{x}\le 2\right\}$，集合 $B=\left\{y\middle|y=x^{2}+2\right\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$[1,4]$　　B．$[2,4]$　　C．$\{1,2,3,4\}$　　D．$\{2,3,4\}$

2．已知复数 $z=\frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$（其中i为虚数单位），则 z 的共轭复数的虚部为（　）

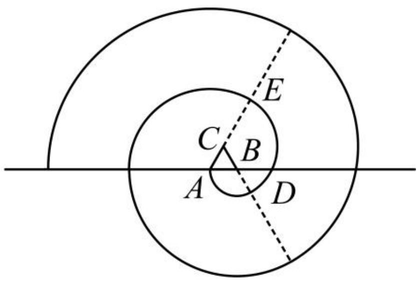
A．$\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　B．$-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

3．某校高三年级一共有1200名同学参加数学测验，已知所有学生成绩的第80百分位数是103分，则数学成绩不小于103分的人数至少为（　）

A．220　　B．240　　C．250　　D．300

4．蚊香具有悠久的历史，我国蚊香的发明与古人端午节的习俗有关。如图为某校数学社团用数学软件制作的“蚊香”。画法如下：在水平直线上取长度为1的线段 AB，作一个等边三角形 ABC，然后以点 B 为圆心，AB 为半径逆时针画圆弧交线段 CB 的延长线于点 D（第一段圆弧），再以点 C 为圆心，CD 为半径逆时针画圆弧交线段 AC 的延长线于点 E，再以点 A 为圆心，AE 为半径逆时针画圆弧……以此类推，当得到的“蚊香”恰好有11段圆弧时，“蚊香”的长度为（　）


蚊香



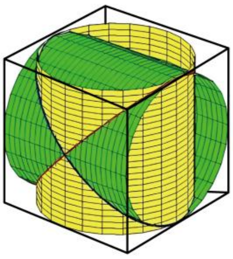
A．14π　　B．18π　　C．30π　　D．44π

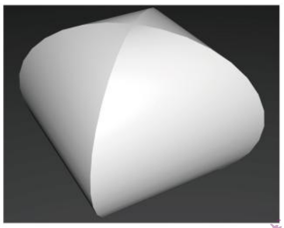
5．设 $\vec{a},\vec{b}$ 是两个单位向量，若 $\vec{a}+\vec{b}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $\frac{2}{3}\vec{b}$，则 $\cos<\vec{a},\vec{b}>=$（　）

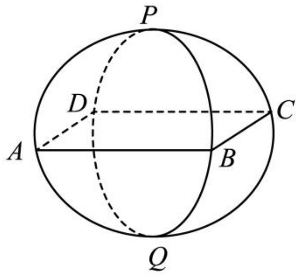
A．$-\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　D．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

6．魏晋时期数学家刘徽（图 a）为研究球体的体积公式，创造了一个独特的立体图形“牟合方盖”，它由完全相同的四个曲面构成，相对的两个曲面在同一圆柱的侧面上．如图，将两个底面半径为 1 的圆柱分别从纵横两个方向嵌入棱长为 2 的正方体时（如图 b），两圆柱公共部分形成的几何体（如图 c）即得一个“牟合方盖”，图 d 是该“牟合方盖”的直观图（图中标出的各点 A，B，C，D，P，Q 均在原正方体的表面上）．


刘徽
a


b


c



d

由“牟合方盖”产生的过程可知，图 d 中的曲线 $PBQD$ 为一个椭圆，则此椭圆的离心率为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　D．$\dfrac{1}{4}$

7．已知函数 $f\left(x\right)=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-2\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+1$，将函数 $f\left(x\right)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度，得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象，若 x_1,x_2 是关于 x 的方程 $g\left(x\right)=a$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 内的两根，则 $\sin\left(2x_1+2x_2\right)=$（　　）

A．$\dfrac{3}{5}$　　B．$-\dfrac{3}{5}$　　C．$\dfrac{\sqrt{10}}{10}$　　D．$-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

8．已知 M 是圆 $C:(x-1)^2+y^2=4$ 上的动点，以点 M 为圆心，$|OM|$ 为半径作圆 M，设圆 M 与圆 C 交于 A，B 两点，则下列点中，直线 AB 一定不经过（　　）

A．$\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{2}\right)$　　B．$\left(\dfrac{3}{2},1\right)$　　C．$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$　　D．$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=\cos^2\theta\left(\theta\neq k\pi,k\in Z\right)$，则不因 θ 的变化而变化的是（　　）

A．顶点坐标　　B．渐近线方程　　C．焦距　　D．离心率

10．下列说法中正确的是（　　）

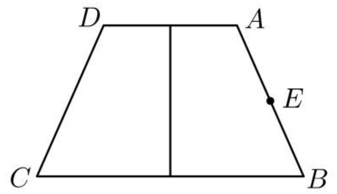
A．将一组数据中的每个数据都减去同一个数后，样本方差没有变化

B．在线性回归分析中，成对数据构成的点都在回归直线上的充要条件是相关系数 $r=1$

C．在线性回归分析中，回归直线就是使所有数据的残差平方和最小的直线

D．在线性回归分析中，用最小二乘法求得的回归直线使所有数据的残差和为零

11．已知圆台的轴截面如图所示，其上、下底面半径分别为$r_{上}=1$，$r_{下}=2$，母线AB长为 2，E为母线AB中点，则下列结论正确的是（   ）



A．圆台母线AB与底面所成角为 60°　　　　B．圆台的侧面积为12π

C．圆台外接球半径为 2　　　　D．在圆台的侧面上，从C到E的最短路径的长度为 5

12．已知函数$f(x)=\dfrac{x}{e^x},g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，若直线$y=b$与曲线$y=f(x)$和$y=g(x)$分别相交于点$A\left(x_1,f\left(x_1\right)\right),B\left(x_2,f\left(x_2\right)\right),C\left(x_3,g\left(x_3\right)\right),D\left(x_4,g\left(x_4\right)\right)$，且$x_1<x_2$，$x_3<x_4$，则下列关系中正确的是(   )

A．$x_1+x_4=x_2+x_3$　　　　B．$x_1x_4=x_2x_3$

C．$\ln\left(\dfrac{x_4}{x_3}\right)=x_2-x_1$　　　　D．$\ln\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)=x_4-x_3$

第 II 卷（选择题，共 90 分）

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．已知$\lg a+b=-2$，$a^b=10$，则$a=$______.

14．已知随机变量$\xi\sim N(1,\sigma^2),a>0,b>0$，若$P\left(\xi\le a\right)=P\left(\xi\ge b\right)$，则$\dfrac{4a+b}{ab}$的最小值为__________.

15．$\dfrac{1+\cos 20^\circ}{2\sin 20^\circ}-\sin 10^\circ\times\left(\dfrac{1}{\tan 5^\circ}-\tan 5^\circ\right)=$_______.

16. 已知$[x]$表示不超过x的最大整数，记$\{x\}=x-[x]$，则方程$\{x\}=\left\{\dfrac{2020}{x}\right\}$的整数解个数为__________.

四、解答题：本大题共 6 小题，满分 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

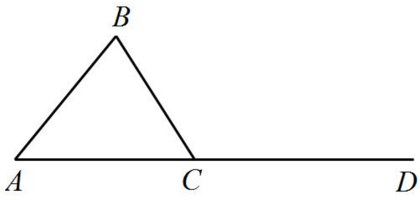
已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=2$，$a_n\cdot a_{n+1}=2^n$.

（1）证明：$\dfrac{a_{n+2}}{a_n}$为常数；

（2）设数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为T_n，求T_{2n}.

18．（本小题满分 12 分）

一次机器人足球比赛中，甲队 1 号机器人在点 A 处，2 号机器人在点 B 处，3 号机器人在点 C 处，且 $\angle BAC=45^\circ$，$\angle BCA=75^\circ$，$AC=\left(12-4\sqrt{3}\right)$ 米，如图所示：

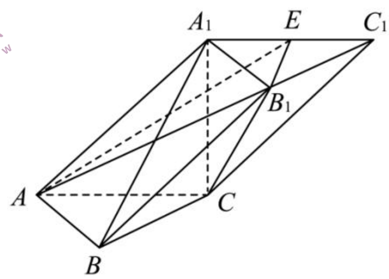


(1)求 1 号机器人和 2 号机器人之间的距离；

(2)若 2 号机器人发现足球在点 D 处向点 A 作匀速直线运动，2 号机器人则立刻以足球滚动速度的一半作匀速直线运动去拦截足球．已知 $AD=17$ 米，忽略机器人原地旋转所需的时间，若 2 号机器人最快可在线段 AD 上的点 E 处截住足球，求此时线段 AE 的长．

19．（本小题满分 12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，$A_1C\perp BC$，平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 ABC.



(1)证明：$A_1A=A_1B$；

(2)若 E 为 A_1C_1 的中点，直线 B_1B 与平面 ABC 所成的角为 45°，

求直线 B_1C 与平面 AB_1E 所成的角的正弦值.

20．（本小题满分 12 分）

某大学有 A，B 两个餐厅为学生提供午餐与晚餐服务，甲、乙两位学生每天午餐和晚餐都在学校就餐，近 100 天选择餐厅就餐情况统计如下：

选择餐厅情况（午餐，晚餐）	(A,A)	(A,B)	(B,A)	(B,B)
甲	30 天	20 天	40 天	10 天
乙	20 天	25 天	15 天	40 天

假设甲、乙选择餐厅相互独立，用频率估计概率．

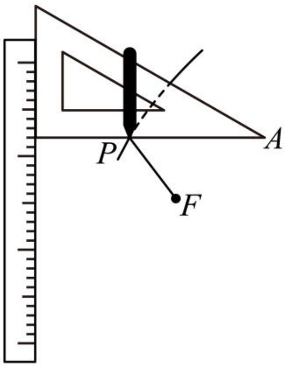
(1)分别估计一天中甲午餐和晚餐都选择 A 餐厅就餐的概率，乙午餐和晚餐都选择 B 餐厅就餐的概率；

(2)记 X 为甲、乙在一天中就餐餐厅的个数，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

(3)假设 M 表示事件“A 餐厅推出优惠套餐”，N 表示事件“某学生去 A 餐厅就餐”，$P(M)>0$，一般来说在推出优惠套餐的情况下学生去该餐厅就餐的概率会比不推出优惠套餐的情况下去该餐厅就餐的概率要大，证明：$P(M|N)>P(M|\overline{N})$．

21．（本小题满分 12 分）

如图：李华同学先把一根直尺固定在画板上面，把一块三角板的一条直角边紧靠在直尺边沿，再取一根细绳，它的长度与另一直角边相等，让细绳的一端固定在三角板的顶点 A 处，另一端固定在画板上点 F 处，用铅笔尖扣紧绳子（使两段细绳绷直），靠住三角板，然后将三角板沿着直尺上下滑动，这时笔尖在平面上画出了圆锥曲线 C 的一部分图象．已知细绳长度为 3，经测量，当笔尖运动到点 P 处，此时，$\angle FAP=30°,\angle AFP=90°$．设直尺边沿所在直线为 a，以过 F 垂直于直尺的直线为 x 轴，以过 F 垂直于 a 的垂线段的中垂线为 y 轴，建立平面直角坐标系．



(1)求曲线 C 的方程；

(2)斜率为 k 的直线过点 $D(0,-3)$，且与曲线 C 交于不同的两点 M、N，已知 k 的取值范围为 $(0,2)$，探究：是否存在 λ，使得 $\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{DN}$，若存在，求出 λ 的范围；若不存在，说明理由．

22.（本小题满分 12 分）

已知曲线 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在点 $\left(x_0,\mathrm{e}^{x_0}\right)$ 处的切线为 l，设 $f_i(x)=\mathrm{e}^{\left(\frac{i}{n}\right)^x}$，$i=1$，2，…，n$-1$，$n\in N^*$ 且 $n\geq 2$．

(1)设 x_0 是方程 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ 的一个实根，证明：l 为曲线 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 和 $y=\ln x$ 的公切线；

(2)当 $x\in[-1,1]$ 时，对任意的 $n\in N^*$ 且 $n\geq 2$，$f_1(x)f_2(x)\cdots f_{n-1}(x)\geq\dfrac{1}{\mathrm{e}^m}$ 恒成立，求 m 的最小值．