乐山市高中2023届第一次调查研究考试
文科数学参考答案及评分意见

2022.12

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.

CBDDC　CBAAC　DB

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. -5；　14. $y^2=12x$；　15. 4；　16. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

三、解答题：本大题共6小题，共70分.

17. 解：（1）∵等差数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2+a_3=15$，∴$a_2=5$.　……1分

∵$a_1=2$，∴$d=a_2-a_1=3$，∴$a_n=3n-1$.　……3分

∵等比数列$\{b_n\}$满足$b_1b_2b_3=64$，∴$b_2=4$.　……4分

∵$b_1=2$，∴$q=\frac{b_2}{b_1}=2$，∴$b_n=2^n$.　……6分

（2）由题知$\{c_n\}$的前20项

$S_{20}=a_1+a_3+\cdots+a_{19}+\sqrt{b_2}+\sqrt{b_4}+\cdots+\sqrt{b_{20}}$　……8分

$=\frac{2+56}{2}\cdot 10+\frac{2\cdot(2^{10}-1)}{2-1}=2336$.　……12分

18. 解：（1）$f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})+\sin^2x$

$=\cos 2x\cos\frac{\pi}{3}-\sin 2x\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1-\cos 2x}{2}$

$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$　……4分

∴函数$f(x)$的最大值为$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，最小正周期为π.　……6分

（2）∵$f(\frac{B}{2})=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B=-\frac{1}{4}$，∴$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.　……7分

∵B为锐角，∴$B=\frac{\pi}{3}$.　……8分

∵$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，　……9分

∴$a=2\sin A$，$c=2\sin C$.

∴$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\sqrt{3}\sin A\sin C$.　……10分

∴$\sqrt{3}\cos A\cos C+S=\sqrt{3}(\cos A\cos C-\sin A\sin C)=\sqrt{3}\cos(A+C)$.　……11分

$=-\sqrt{3}\cos B=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.　……12分

19. 解：基本时间对应的点集为 $M=\{(x,y)|1\le x\le 4,1\le y\le 4,x\in z,y\in z\}$，

∴基本事件的个数为 $n=4\times 4=16$． ……………………2 分

（1）记"$xy\leqslant 3$"为事件 A.

则事件 A 包含的基本事件有 5 个：$(1,1)$，$(1,2)$，$(1,3)$，$(2,1)$，$(3,1)$.

∴ $P(A)=\dfrac{5}{16}$，即小王获得笔记本的概率为 $\dfrac{5}{16}$. ……………………5 分

（2）记"$xy\geqslant 8$"为事件 B.

则事件 B 包含的基本事件有 6 个：$(2,4)$，$(3,3)$，$(3,4)$，$(4,2)$，$(4,3)$，$(4,4)$.

则 $P(B)=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$. ……………………8 分

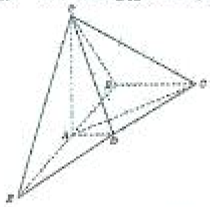
记"其余情况"为事件 C.

则 $P(C)=1-P(A)-P(B)=1-\dfrac{5}{16}-\dfrac{3}{8}=\dfrac{5}{16}$. ……………………11 分

∵ $\dfrac{3}{8}>\dfrac{5}{16}$，

∴小王获得水杯的概率大于获得饮料的概率. ……………………12 分

20. 解：（1）延长 BA、CD 交于点 E；连接 EP，则 EP 为平面 PAB 和平面 PCD 的交线.



……………………3 分

∵ $E\in AB$，$AB\subset$ 平面 PAB，

∴ $E\in$ 平面 PAB.

同理可得 $E\in$ 平面 PCD.

∴ $E\in$ 平面 $PAB\cap$ 平面 PCD.

∵ $P\in$ 平面 PAB，$P\in$ 平面 PCD，

∴ $P\in$ 平面 $PAB\cap$ 平面 PCD. ……………………6 分

∴ EP 为平面 PAB 和平面 PCD 的交线.

（2）∵ $PA\perp$ 平面 $ABCD$，∴ $PA\perp AC$，$PA\perp AB$

∵三角形 PAC 的面积为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$PA=1$，

∴ $\dfrac{1}{2}PA\times AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $AC=\sqrt{2}$. 从而 $PC=\sqrt{3}$.

又在直角三角形 PAB 中，$PA=AB=1$，∴ $PB=\sqrt{2}$.

在 $\triangle PBC$ 中，$PB=\sqrt{2}$，$BC=1$，$PC=\sqrt{3}$，

∴ $PB^2+BC^2=PC^2$，∴ $PB\perp BC$. ……………………8 分

∵ $BC\perp PA$，

∴ $BC\perp$ 平面 PAB.

$\because ABCD$ 为直角梯形，由 $AB=BC=1$，$AD=\frac{1}{2}$，$\therefore DC=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

$\because$ 在直角三角形 PAD 中，$PA=1$，$AD=\frac{1}{2}$，$\therefore PD=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

$\because$ 在三角形 PCD 中，由 $CD=PD=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$PC=\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle PCD}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}$． ……………………10 分

设 B 到平面 PCD 的距离为 h，

$\because V_{B-PCD}=V_{P-BCD}$，

$\therefore \frac{1}{3}S_{\triangle PCD}\cdot h=\frac{1}{3}PA\cdot S_{\triangle BCD}$，解得 $h=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$\therefore B$ 到平面 PCD 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$． ……………………12 分

21．解：（1）由题意 $f'(x)=ae^x-1,a\in R$ ……………………1 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)<0$ 对任意 $x\in R$ 恒成立，

$\therefore g(x)$ 在 R 上单调递减； ……………………2 分

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-\ln a$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增；在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减；

综上：当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，$f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增； ……………………3 分

（2）①$\because f(x)\geqslant 0$，$\therefore a\geqslant \frac{x+1}{e^x}$． ……………………4 分

令 $g(x)=\frac{x+1}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{e^x-(x+1)e^x}{e^{2x}}=\frac{-x}{e^x}$． ……………………5 分

当 $x<0$ 时，$g'(x)>0$；当 $x>0$ 时，$g'(x)<0$． ……………………6 分

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减． ……………………7 分

$\therefore g(x)\leqslant g(0)=1$，$\therefore a\geqslant 1$． ……………………8 分

②由①知：$a=1$ 时，$f(x)\geqslant 0$，即：$e^x\geqslant x+1$． ……………………9 分

$\therefore \ln(x+1)\leqslant x$．

令 $x=\frac{2^i}{(2^i+1)(2^{i+1}+1)}$，

则 $\ln[1+\frac{2^i}{(2^i+1)(2^{i+1}+1)}]\leqslant\frac{2^i}{(2^i+1)(2^{i+1}+1)}=\frac{1}{2^i+1}-\frac{1}{2^{i+1}+1}$ ……………………10 分

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{n}\ln[1+\frac{2^i}{(2^i+1)(2^{i+1}+1)}]\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{1}{2^i+1}-\frac{1}{2^{i+1}+1})=\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}+1}$ ……………………11 分

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{n}\ln[1+\frac{2^i}{(2^i+1)(2^{i+1}+1)}]<\frac{1}{3}$，得证． ……………………12 分

22. 解：（1）$\because \rho = 2\sin\theta$，$\therefore \rho^2 = 2\rho\sin\theta$ ……1 分

$\because \rho^2 = x^2 + y^2$，$\rho\sin\theta = y$， ……3 分

$\therefore C$ 的直角坐标方程为：$x^2 + (y-1)^2 = 1$. ……5 分

（2）由已知可得点 A, B 的直角坐标为 $A(0,1), B(\sqrt{3},1)$. ……6 分

$\because$ 线段 BP 的中垂线与直线 AP 交于点 Q，

$\therefore |QB| = |QP|$ 且 $||QB| - |QA|| = \pm 1$ ……7 分

设 $Q(x,y)$，则 $\sqrt{(x-\sqrt{3})^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \pm 1$ ……8 分

化简可得点 Q 的轨迹方程 $2x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}x + 2y = 0$ ……10 分

23. 解：（1）$f(x) = 2|x+1| - |2x+3| = |2x+2| - |2x+3|$

$\leqslant |(2x+2) - (2x+3)| = 1$ ……4 分

$\therefore f(x)$ 的最大值 $m = 1$. ……5 分

（注：分段讨论也可求解.）

（2）$\because \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$，$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{bc}}$，$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{ac}}$， ……7 分

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \sqrt{\frac{1}{ab}} + \sqrt{\frac{1}{bc}} + \sqrt{\frac{1}{ac}}$. ……8 分

$\because abc = 1$，$\therefore \frac{1}{ab} = c$，$\frac{1}{bc} = a$，$\frac{1}{ac} = b$， ……9 分

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \sqrt{c} + \sqrt{b} + \sqrt{a}$. ……10 分

当 $a = b = c$ 时等号成立，即原式不等式成立.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线