

衡水中学 2023 高三一模



衡水中学 2023 届高三第一次模拟考试

高三数学

精勤求学，敦笃立志

第一命题人：张东鹏 赵铮
第二命题人：贺军 李立涛
校对：刘子帆
审核：杨志腾

一、选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $M = \{x|x \leq m\}$, $N = \{x|y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}\}$. 若 $M \cup N = \mathbf{R}$, 则实数 m 的取值范围是

A. $[-1, +\infty)$ B. $[4, +\infty)$

C. $(-\infty, -1]$ D. $(-\infty, 4]$

2. 已知复数 z_1, z_2 , 当 $z_1 = 1 + 2i$ 时, $\frac{z_2}{z_1 z_1 - z_1} = z_1$, 则 $z_2 =$

A. $8 + 6i$ B. $8 - 6i$ C. $10 + 10i$ D. $10 - 10i$

3. 在流行病学中, 在没有外力介入, 同时所有人都没有免疫力的情况下, 1 个感染了某种传染病的人, 会把疾病传染给其他多少个人的平均数叫做基本传染数. 当基本传染数高于 1 时, 1 个感染者平均会感染 1 个以上的人, 从而导致感染者人数急剧增长; 当基本传染数低于 1 时, 疫情才可能逐渐消散, 而广泛接种疫苗是降低基本传染数的有效途径. 假设某种传染病的基本传染数为 R_0 , 1 个感染者平均会接触到 N 个新人 ($N \geq R_0$), 这 N 个人中有 V 个人接种过疫苗 ($\frac{V}{N}$ 称为接种率), 那么 1 个感染者可传染的新感染人数为 $\frac{R_0}{N}(N - V)$. 已知新冠病毒在某地的基本传染数 $R_0 = \log_2 4 \sqrt{2}$, 为了使 1 个感染者可传染的新感染人数不超过 1 人, 该地疫苗的接种率至少为

A. 30% B. 40% C. 50% D. 60%

4. 已知角 α 的顶点是坐标原点, 始边是 x 轴的正半轴, 终边是射线 $y = 2x (x \geq 0)$, 则 $\tan(2\alpha + \frac{\pi}{4}) =$

A. $\frac{1}{7}$ B. $-\frac{1}{7}$ C. -7 D. $-\frac{1}{3}$

5. 某新能源汽车生产公司, 为了研究某生产环节中两个变量 x, y 之间的相关关系, 统计样本数据得到如下表格:

x_i	20	23	25	27	30
y_i	2	2.4	3	3	4.6

由表格中的数据可以得到 y 与 x 的经验回归方程为 $y = \frac{1}{4}x + a$, 据此计算, 下列选项中残差的绝对值最小的样本数据是()

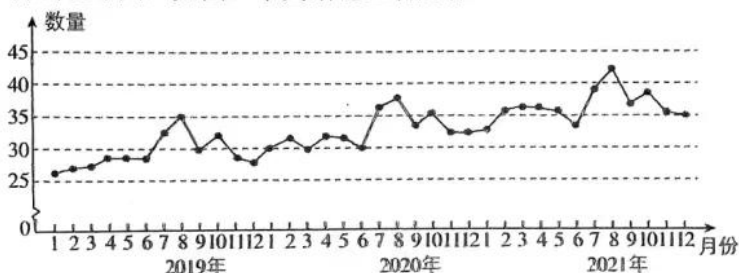
A. (30, 4.6) B. (27, 3)
C. (25, 3) D. (23, 2.4)

生活时常沉闷，但跑起来有风。

6. 已知 $\triangle ABC$ 中, $A=120^\circ$, $AB=3$, $AC=4$, $\vec{CM}=\vec{4MB}$, $\vec{AN}=\vec{NB}$, 则 $\vec{AC}\cdot\vec{MN}=\quad$
- A. $-\frac{12}{5}$ B. $-\frac{7}{5}$ C. $-\frac{2}{5}$ D. $-\frac{1}{5}$
7. 已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, 过底边 BC 的平面与上底面交于线段 MN , 若截面 $BCM N$ 将三棱柱分成了体积相等的两部分, 则 $\frac{MN}{BC}=\quad$
- A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ B. $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ D. $3-\frac{3\sqrt{3}}{2}$
8. 已知锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a=\sqrt{3}$, $b^2+c^2-bc=3$, 则 $\triangle ABC$ 面积的取值范围是
- A. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$ B. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$
- C. $\left[\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ D. $\left[\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$

二、选择题(本大题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分)

9. 某商店为了解该店铺商品的销售情况, 对某产品近三年的产品月销售数据进行统计分析, 绘制了折线统计图, 如图. 下列结论正确的有



- A. 该产品的年销量逐年增加
 B. 该产品各年的月销量高峰期大致都在8月
 C. 该产品2019年1月至12月的月销量逐月增加
 D. 该产品各年1月至6月的月销量相对于7月至12月波动性更小、变化更平稳
10. 已知函数 $f(x)$ 的图像的对称轴方程为 $x=3$, 则函数 $f(x)$ 的解析式可以是
- A. $f(x)=x+\frac{1}{x+3}$
 B. $f(x)=e^{x-3}+e^{3-x}$
 C. $f(x)=x^4-18x^2$
 D. $f(x)=|x^2-6x|$
11. 红、黄、蓝被称为三原色, 选取其中任意几种颜色调配, 可以调配出其他颜色. 已知同一种颜色混合颜色不变, 等量的红色加黄色调配出橙色; 等量的红色加蓝色调配出紫色; 等量的黄色加蓝色调配出绿色. 现有红、黄、蓝颜料各两瓶, 甲从六瓶颜料中任取两瓶, 乙再从余下四瓶颜料中任取两瓶, 两人分别进行等量调配, A 表示事件“甲调配出红色”; B 表示事件“甲调配出绿色”; C 表示事件“乙

衡水中学 2023 高三一模

调配出紫色”，则下列说法正确的是

- A. 事件 A 与事件 C 是独立事件
- B. 事件 A 与事件 B 是互斥事件
- C. $P(C|A)=0$
- D. $P(B)=P(C)$

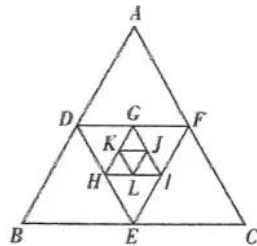
12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 与直线 $l: x - y - 1 = 0$ 交于 A, B 两点, 记直线 l 与 x 轴的交点为 E , 点 E, F 关于原点对称, 若 $\angle AFB = 90^\circ$, 则()

- A. $2a^2 + b^2 = a^2b^2$
- B. 椭圆 C 过 4 个定点
- C. 存在实数 a , 使得 $|AB| = 3$
- D. $|AB| < \frac{7}{2}$

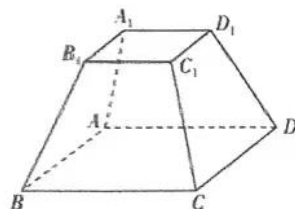
三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知向量 $a = (2, -3), b = (-1, 2), c = (t-2, 3t)$. 若向量 c 与 $2a + b$ 平行, 则实数 t 的值为_____.

14. 分形几何学是法国数学家曼德尔勃罗特在 20 世纪 70 年代创立的一门新学科, 它的创立为解决传统科学众多领域的难题提供了全新的思路. 如图, 正三角形 ABC 的边长为 4, 取 $\triangle ABC$ 各边的中点 D, E, F 作第 2 个三角形, 然后再取 $\triangle DEF$ 各边的中点 G, H, I 作第 3 个三角形, 以此方法一直进行下去. 已知 $\triangle ABC$ 为第 1 个三角形, 设前 n 个三角形的面积之和为 S_n , 若 $S_n > 5\sqrt{3}$, 则 n 的最小值为_____.



15. 如图, 已知台体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的上、下底面均为长方形, 且上、下底面中心的连线与底面垂直, 上、下底面的距离为 4. 若 $AB = 4\sqrt{6}, AD = 4\sqrt{2}, A_1B_1 = 4\sqrt{3}$, 则该台体的外接球的表面积为_____.



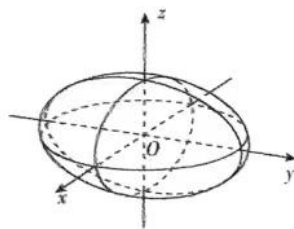
16. 在空间直角坐标系下, 由方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (a > 0, b > 0, c > 0)$ 所表示的曲面叫做椭球面(或称椭圆面).

如果用坐标平面 $z=0, y=0, x=0$ 分别截椭球面, 所得截面都是椭圆(如图

所示), 这三个截面的方程分别为 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0, \end{cases} \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0, \end{cases} \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0, \end{cases}$ 上述

三个椭圆叫做椭球面的主截线(或主椭圆). 已知椭球面的轴与坐标轴重合,

且过椭圆 $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$ 与点 $M(1, 2, \sqrt{23})$, 则这个椭球面的方程为_____.



四、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分) 已知 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) \left(\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2} \right)$ 同时满足下列四个条件中的三个:
① $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$; ② $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) \left(|\varphi| < \frac{\pi}{2} \right)$ 的图象可以由 $y = \sin x - \cos x$ 的图象平移得到; ③ 相邻两条对

生活时常沉闷，但跑起来有风。

称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$ ；④最大值为2.

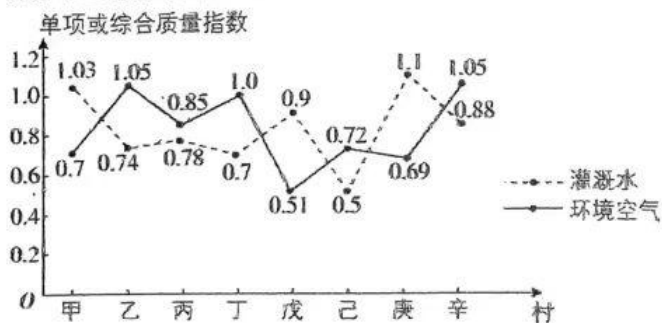
(1)请指出这三个条件，并说明理由；

(2)若曲线 $y=f(x)$ 的对称轴只有一条落在区间 $[0, m]$ 上，求 m 的取值范围.

18. (12分)温室是以采光覆盖材料作为全部或部分围护结构材料，具有透光、避雨、保温、控温等功能，可在冬季或其他不适宜露地植物生长的季节供栽培植物的建筑，而温室蔬菜种植技术是一种比较常见的技术，它具有较好的保温性能，使人们在任何时间都可吃到反季节的蔬菜，深受大众喜爱。温室蔬菜生长和蔬菜产品卫生质量要求的温室内土壤、灌溉水、环境空气等环境质量指标，其温室蔬菜产地环境质量等级划定如表所示。

环境质量等级	土壤各单项或综合质量指数	灌溉水各单项或综合质量指数	环境空气各单项或综合质量指数	等级名称
1	≤ 0.7	≤ 0.5	≤ 0.6	清洁
2	0.7 - 1.0	0.5 - 1.0	0.6 - 1.0	尚清洁
3	> 1.0	> 1.0	> 1.0	超标

各环境要素的综合质量指数超标，灌溉水、环境空气可认为污染，土壤则应做进一步调研，若确对其所影响的植物(生长发育、可食部分超标或用作饮料部分超标)或周围环境(地下水、地表水、大气等)有危害，方能确定为污染。某乡政府计划对所管辖的甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛，共8个村发展温室蔬菜种植，对各村试验温室蔬菜环境产地质量监测得到的相关数据如下：



(1)若从这8个村中随机抽取2个进行调查，求抽取的2个村应对土壤做进一步调研的概率；

(2)现有一技术人员在这8个村中随机选取3个进行技术指导，记 ξ 为技术员选中村的环境空气等级为尚清洁的个数，求 ξ 的分布列和数学期望.

衡水中学 2023 高三一模

19. (12分) 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足 $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 $B_n = 1 - \frac{1}{2^n}$.

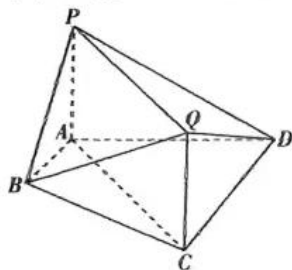
(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $c_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 证明: $T_{2n} - T_n \leq \frac{1}{a_2 + b_2}$.

20. (12分) 如图所示, A, B, C, D 四点共面, 其中 $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$, $AB = \frac{1}{2}AD$, 点 P, Q 在平面 $ABCD$ 的同侧, 且 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $CQ \perp$ 平面 $ABCD$.

(1) 若直线 $l \perp$ 平面 PAB , 求证: $l \parallel$ 平面 CDQ ;

(2) 若 $PQ \parallel AC$, $\angle ABP = \angle DAC = 45^\circ$, 平面 $BPQ \cap$ 平面 $CDQ = m$, 求锐二面角 $B-m-C$ 的余弦值.



生活时常沉闷，但跑起来有风。

21. (12分)在平面直角坐标系 xOy 中，已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$ ，直线 $l: y = x - 1$ 与双曲线 C 交于 A, B 两点，点 $D(x_0, y_0)$ 在双曲线 C 上。

(1)求线段 AB 中点的坐标；

(2)若 $a = 1$ ，过点 D 作斜率为 $\frac{2x_0}{y_0}$ 的直线 l' 与直线 $l_1: \sqrt{2}x - y = 0$ 交于点 P ，与直线 $l_2: \sqrt{2}x + y = 0$ 交于点 Q ，若点 $R(m, n)$ 满足 $|RO| = |RP| = |RQ|$ ，求 $m^2 + 2x_0^2 - 2n^2 - y_0^2$ 的值。

22. (12分)已知函数 $f(x) = \frac{a}{2} \ln(x+1) - \sqrt{x+2}$ ，其中 $a \in \mathbb{R}$ 。

(1)当 $a = \frac{8}{3}$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)当 $x \geq 0$ 时， $f(x) \leq \frac{3}{a}(\sin x + \cos x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

