# 2023年普通高等学校招生全国统一考试押题密卷（五）

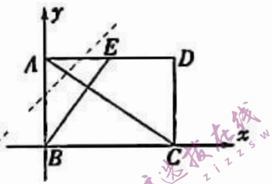
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | B | A | D | B | D | B | A | A | ACD | ACD | ABC | ABD |

1. B ［由 $\lg x<0$，解得 $0<x<1$，从而求得 $A=(0,1)$；由 $\frac{1}{2}<2^x<2$，解得 $-1<x<1$，从而求得 $B=(-1,1)$，所以 $A\subseteq B$，故选 B.］

2. A ［设复数 $z=a+bi$，则 $z-2-3i=(a-2)+(b-3)i$，所以 $|z-2-3i|=\sqrt{(a-2)^2+(b-3)^2}=5$，选项 A 中，$a=2$，$b=-8$ 不满足等式，错误；选项 B 中，$a=-2$，$b=6$，满足等式，正确；选项 C 中，$a=5$，$b=-1$，满足等式，正确；选项 D 中，$a=5$，$b=7$，满足等式，正确.］

3. D ［若甲拿到《春秋》，则乙有 3 种拿书方法，其他三人共有 $A_3^3$ 种方法，根据分步乘法计数原理可知共有 $3A_3^3=18$ 种方法；若甲没拿到《春秋》，则甲有 3 种拿书方法，乙有 2 种拿书方法，其他三人共有 $A_3^3$ 种方法，根据分步乘法计数原理可知共有 $3\times2\times A_3^3=36$ 种方法；综上，共有 54 种分配方法.］

4. B ［由题意建立如图所示直角坐标系，因为 $AB=3$，$BC=4$，则 $B(0,0)$，$A(0,3)$，$C(4,0)$，$\overrightarrow{BA}=(0,3)$，$\overrightarrow{AC}=(4,-3)$，设 $\overrightarrow{BE}=(a,3)$，因为 $BE\perp AC$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=4a-9=0$，解得 $a=\frac{9}{4}$.




由 $\overrightarrow{BA}=\lambda\overrightarrow{BE}+\mu\overrightarrow{AC}$，得 $(0,3)=\lambda\left(\frac{9}{4},3\right)+\mu(4,-3)$，

所以 $\begin{cases}\frac{9}{4}\lambda+4\mu=0,\\ 3\lambda-3\mu=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{16}{25},\\ \mu=-\frac{9}{25},\end{cases}$ 所以 $\lambda+\mu=\frac{7}{25}$.］

5. D ［由题意，设明间的宽度 $a$ 为等比数列的首项，从明间向右共 5 间，宽度成等比数列，公比为 $\frac{7}{8}$，同理从明间向左共 5 间，宽度成等比数列，公比为 $\frac{7}{8}$.

则由 $S_n=\frac{a\left[1-\left(\frac{7}{8}\right)^n\right]}{1-\frac{7}{8}}$，可得 $S_5=\frac{a\left[1-\left(\frac{7}{8}\right)^5\right]}{1-\frac{7}{8}}$

$=8a-7a\left(\frac{7}{8}\right)^4$，所以总宽度为 $2S_5-a=$

$2\left[8a-7a\left(\frac{7}{8}\right)^4\right]-a=15a-14a\left(\frac{7}{8}\right)^4$.］

6. B ［又因为 $f(x)=f(|x|)$，当 $x\geq0$ 时，则有 $f(x)=f(x)$，当 $x<0$ 时，则有 $f(x)=f(-x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，所以 $-\frac{\pi}{6}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$. 所以 $\varphi=k\pi+\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$. 又因为 $0<\varphi<\pi$ 所以 $k=0$，$\varphi=\frac{2\pi}{3}$. 所以 $f(x)=3\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)=3\cos\omega x$. 又因为 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3$，所以 $3\cos\frac{\pi}{2}\omega=-3$，所以 $\frac{\pi}{2}\omega=(2k+1)\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=2(2k+1)=4k+2$，$k\in\mathbf{Z}$，又因为 $0<\omega<4$，所以 $k=0$，$\omega=2$. 所以 $f(x)=3\cos2x$. 所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$.］

7. A ［因为当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$x<\tan x$，

故 $\frac{c}{b}=4\tan\frac{1}{4}>1$，故 $\frac{c}{b}>1$，所以 $c>b$；

设 $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-1$，$x\in(0,+\infty)$，

$f'(x)=-\sin x+x>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $f\left(\frac{1}{4}\right)>f(0)=0$，所以 $\cos\frac{1}{4}-\frac{31}{32}>0$，

所以 $b>a$，所以 $c>b>a$，故选 A.］

8. A ［$A(-a,0)$，$B(a,0)$，设 $P(x_0,y_0)$，则 $y_0^2=\frac{b^2(a^2-x_0^2)}{a^2}$，而 $m=\frac{y_0}{x_0+a}$，$n=\frac{y_0}{x_0-a}$，则 $mn=\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}$

$=-\frac{b^2}{a^2}$，又 $\frac{a}{b}\left(3-\frac{2}{3mn}\right)+\frac{3}{mn}+\frac{9}{2}(\ln|m|+\ln|n|)$

$=\frac{a}{b}\left(3-\frac{2}{-\frac{3b^2}{a^2}}\right)+\frac{3}{-\frac{b^2}{a^2}}+9\ln\frac{b}{a}$

$=\frac{2}{3}\left(\frac{a}{b}\right)^3-3\left(\frac{a}{b}\right)^2+3\left(\frac{a}{b}\right)+9\ln\frac{b}{a}$，

令 $\frac{a}{b}=t>1$，则 $f(t)=\frac{2}{3}t^3-3t^2+3t-9\ln t$，

所以 $f'(t)=\frac{2t^3-6t^2+3t-9}{t}=\frac{(t-3)(2t^2+3)}{t}$，

故 $f(t)_{\min}=f(3)$，即 $\frac{a}{b}=3$，从而 $e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.］

9. ACD ［对于 A，代入点 $(0,0)$ 得 $(-\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2=1$ 恒成立，A 正确；对于 B，$\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=|1-2|$，即两圆心距离等于两圆半径差，两圆内切，B 错误；对于 C，直线 $x+y=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 被圆 $\Omega$ 所截得弦长为

$2\sqrt{1-\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta-\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}\right)^2}=2\sqrt{1-\frac{\left(\sin\theta+\cos\theta-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2}}$

$\because\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，

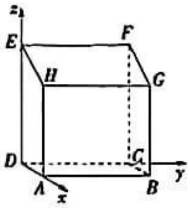
$\therefore2\sqrt{1-\frac{\left(\sin\theta+\cos\theta-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2}}\leq2\sqrt{1-\frac{\left(\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2}}$

$=\sqrt{3}$，即直线 $x+y=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 被圆 $\Omega$ 所截得弦长的最大值为 $\sqrt{3}$，C 正确；对于 D，圆心到直线的距离 $\frac{|\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha|}{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}=|\cos(\theta-\alpha)|\leq1$，故圆和直线相切或相交，D 正确.］

10. ACD ［对 A，因为函数 $f(2x+2)$ 为偶函数，故 $f(2x+2)=f(-2x+2)$，故 $f(x)$ 关于 $x=2$ 对称. 又 $f(x+1)$ 为奇函数，关于原点对称，故 $f(x)$ 关于 $(1,0)$ 对称. 综上，$f(x)$ 关于 $x=2$ 与 $(1,0)$ 对称. 关于 $x=2$ 对称有 $f(x)=f(4-x)$，关于 $(1,0)$ 对称有 $f(4-x)=-f(x-2)$，$f(x)=-f(2-x)$，故 $-f(x-2)=-f(2-x)$，即 $f(x)=f(-x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，故 A 正确；对 B，由 A，因为 $e\in(2,3)$，$f(e)=-f(2-e)=-f(e-2)=-\ln(e-2)$，故 B 错误；对 C，由 A，

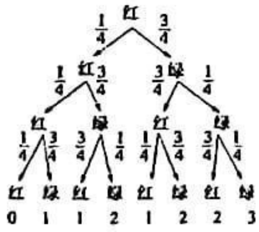
$f\left(1-\frac{1}{e}\right)=f\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\left(\frac{1}{e}\right)=-1$，故 C 正确；对 D，当 $x\in[1,2)$ 时，$2-x\in(0,1]$，故 $f(x)=-f(2-x)=-\ln(2-x)$，故 D 正确.]

11. ABC [因为四边形 $ADEH$ 和 $BCFG$ 为直角梯形，$A,D,C,B$ 为直角顶点，其他四个面均为矩形，所以这个六面体是四棱柱，平面 $ADEH$ 和平面 $BCFG$ 是底面，故 A，B 错误；由题意可知 $DA,DC,DE$ 两两垂直，如图，以点 $D$ 为坐标原点建立空间直角坐标系，则 $E(0,0,4)$，$G(1,3,3)$，$C(0,3,0)$，$H(1,0,3)$，$\overrightarrow{EG}=(1,3,-1)$，$\overrightarrow{CH}=(1,-3,3)$，则 $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{CH}=1-9-3=-11\neq0$，所以 $EG$，$HC$ 不垂直，故 C 错误；根据题意可知 $DE\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\overrightarrow{DE}=(0,0,4)$ 为平面 $ABCD$ 的一个法向量，$\overrightarrow{EH}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{HG}=(0,3,0)$，设 $n=(x,y,z)$ 为平面 $EFGH$ 的法向量，则有 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{EH}=x-z=0,\\ n\cdot\overrightarrow{HG}=3y=0,\end{cases}$ 则可取 $n=(1,0,1)$，则 $\cos\langle n,\overrightarrow{DE}\rangle=\frac{n\cdot\overrightarrow{DE}}{|n|\cdot|\overrightarrow{DE}|}=\frac{4}{4\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以平面 $EFGH$ 与平面 $ABCD$ 的夹角为 $45°$，故 D 正确.]



12. ABD [由于 $y=e^x$ 和 $y=\ln x$ 互为反函数，则 $y=e^x$ 和 $y=\ln x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，将 $y=-x+2$ 与 $y=x$ 联立求得交点为 $(1,1)$，则 $\frac{x_1+x_2}{2}=1$，即 $x_1+x_2=2$，A 正确；易知 $f(x)$ 为单调递增函数，因为 $f(0)=-1<0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-\frac{3}{2}>0$，由零点存在性定理可知 $0<x_1<\frac{1}{2}$，B 正确；易知 $g(x)$ 为单调递减函数，$g(1)=-1<0$，$g(\sqrt{e})=\sqrt{e}-\frac{3}{2}>0$，由零点存在性定理可知 $1<x_2<\sqrt{e}$. 因为 $x_1x_2=(2-x_2)x_2=x_2\ln x_2$，令 $y=x\ln x$，则 $y'=1+\ln x>0$ 在 $(1,e)$ 上恒成立，所以 $y=x\ln x$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，所以 $x_1x_2=x_2\ln x_2<\frac{\sqrt{e}}{2}$，C 错误；因为 $x_1>0$，$x_2>0$，所以 $x_1x_2<\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=1$，所以 $0<x_1<\frac{1}{x_2}<1$. 令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $h(x_1)<h\left(\frac{1}{x_2}\right)$，即 $\frac{\ln x_1}{x_1}<\frac{\ln\frac{1}{x_2}}{\frac{1}{x_2}}$，整理得 $\frac{\ln x_1}{x_1}<-x_2\ln x_2$，D 正确.]

13. 解析：该游客转动指针三次的结果的树形图如图：



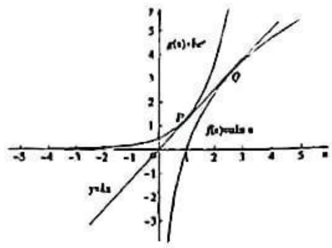
则 $X$ 的分布列如下：

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{64}$ | $\frac{21}{64}$ | $\frac{39}{64}$ | $\frac{3}{64}$ |

故 $E(X)=0\times\frac{1}{64}+1\times\frac{21}{64}+2\times\frac{39}{64}+3\times\frac{3}{64}=\frac{27}{16}$.

答案：$\frac{27}{16}$

14. 解析：根据题意作出草图如图；设直线 $y=kx$ 与函数 $f(x)=a\ln x$，$g(x)=be^x$ 图象分别相切于点 $P$ 和 $Q$，$P(x_1,be^{x_1})$，$Q(x_2,a\ln x_2)$，$f'(x)=\frac{a}{x}$，$g'(x)=be^x$，



则有 $\begin{cases}\frac{a}{x_2}=k\\ a\ln x_2=kx_2\end{cases}$ 和 $\begin{cases}be^{x_1}=k\\ be^{x_1}=kx_1\end{cases}$，解得 $x_2=e$，$x_1=1$.

因为 $k>0$，所以 $a>0$，$b>0$. $\therefore k=be=\frac{a}{e}$，得 $a=be^2$.

$4a+\frac{1}{b}=4be^2+\frac{1}{b}\geqslant2\sqrt{4e^2}=4e$，当且仅当 $4be^2=\frac{1}{b}$，即 $b=\frac{1}{2e}$ 时取等号，即 $4a+\frac{1}{b}$ 的最小值为 $4e$.

答案：$4e$

15. 解析：由条件得 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{4-b^2}{4}=\frac{1}{4}$，$\therefore b^2=3$.

$\therefore$ 椭圆 $C_1$ 的方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=1$，

$\therefore F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$. 由于点 $N$ 在线段 $F_1M$ 的延长线上，$|MN|=|MF_2|$，

所以 $|F_1N|=|MF_1|+|MF_2|=4$.

$\therefore$ 点 $N$ 的轨迹是以 $F_1$ 为圆心，以 4 为半径的圆，方程为 $(x+1)^2+y^2=16$.

设 $P(x,y)$，则 $F_2(1,0)$ 关于 $P(x,y)$ 对称的点的坐标为 $(2x-1,2y)$，

$\therefore(2x-1+1)^2+(2y)^2=16$，化简得点 $P$ 的轨迹方程为 $x^2+y^2=4$，

即点 $P$ 的轨迹是以原点为圆心，以 2 为半径的圆.

$F_1(-1,0)$，所以 $|F_1P|$ 的最大值为 3.

答案：3

16. 解析：设 $AB=1$，$BC=a$，连接 $BF$、$CE$.

因为 $AB=AF=DC=CE$，且每一个内角都为 $120°$，

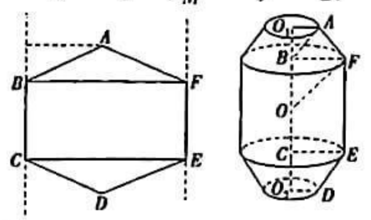
所以 $\angle ABF=\angle AFB=\angle DCE=\angle DEC=30°$，

所以 $\angle FBC=\angle BFE=\angle FEC=\angle ECB=90°$，

即 $BC\perp BF$，$EF\perp BF$，$BC\perp CE$，$BC\perp EF$，所以四边形 $BFEC$ 是长方形，$OF^2=\frac{a^2}{4}+3=\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=OA^2$，

$\therefore a=4$，$\therefore OF=\sqrt{7}$，$V_{球}=\frac{4\pi}{3}r^3=\frac{28\sqrt{7}}{3}\pi$，

$V_M=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\pi+3\pi+\frac{3}{2}\pi\right)\times\frac{1}{2}\times2-2\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\pi\times\frac{1}{2}+3\pi\times4=\frac{54\pi}{4}=\frac{27\pi}{2}$，$\frac{V_{球}}{V_M}=\frac{28\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{2}{27}=\frac{56\sqrt{7}}{81}$.



答案：$\frac{56\sqrt{7}}{81}$

17. 解：(1) 由 $4S_n=(a_n+1)^2+4$，得当 $n\geqslant3$ 时，$4S_{n-1}=(a_{n-1}+1)^2+4$，两式相减得 $4a_n=(a_n+1)^2-(a_{n-1}+1)^2$，整理得 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$，（2 分）

因为数列 $\{a_n\}$ 为正项数列，所以 $a_n+a_{n-1}\neq0$，则 $a_n-a_{n-1}-2=0$，即 $a_n-a_{n-1}=2$.

在 $4S_n=(a_n+1)^2+4$ 中，令 $n=2$，则 $4S_2=4a_1+4a_2=(a_2+1)^2+4$，解得 $a_2=3$ 或 $-1$（舍去），所以 $a_2-a_1=1$，数列 $\{a_n\}$ 从第 2 项起为等差数列，公差为 2．

（4 分）

所以 $a_n=\begin{cases}2, n=1\\ 2n-1, n\geqslant 2\end{cases}$，数列 $\{a_n\}$ 不是等差数列．

（5 分）

(2) 当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$．（7 分）

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$

$=\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2}\cdot$

$\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2(2n+1)}$，

因为 $\frac{1}{2(2n+1)}>0$，所以 $\frac{1}{3}-\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{3}$，即 $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}<\frac{1}{3}$．（10 分）

18. 解：(1) 因为 $\sqrt{3}(a^2+b^2-c^2)=2bc\sin A$，故 $\sqrt{3}(a^2+b^2-a^2-b^2+2ab\cos C)=2bc\sin A$．

整理得到：$2\sqrt{3}ab\cos C=2bc\sin A$，即 $\sqrt{3}a\cos C=c\sin A$，

故 $\sqrt{3}\sin A\cos C=\sin C\sin A$，而 $A$ 为三角形内角，故 $\sin A>0$，

所以 $\sqrt{3}\cos C=\sin C$，故 $\tan C=\sqrt{3}$，而 $C$ 为锐角三角形内角，故 $C=\frac{\pi}{3}$．（2 分）

$\sin^2A+\cos^2B=1+\frac{1}{2}(\cos 2B-\cos 2A)$

$=1+\frac{1}{2}\left[\cos 2B-\cos 2\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)\right]$

$=1+\frac{1}{2}\left[\cos 2B-\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2B\right)\right]$

$=1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\cos 2B+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2B\right)$

$=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)$．（4 分）

因为三角形为锐角三角形，故 $\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2}\\ 0<\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，

故 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$，故 $\frac{\pi}{6}<2B-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，故 $-\frac{\sqrt{3}}{2}<\cos\left(2B-\frac{\pi}{6}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $\frac{1}{4}<\sin^2A+\cos^2B<\frac{7}{4}$．（6 分）

(2) 由题设可得 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DA}$，故 $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=2(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CD})$，整理得到 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$．（8 分）

故 $\overrightarrow{CD}^2=\frac{1}{9}\overrightarrow{CB}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{CA}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}$，即 $4=\frac{1}{9}a^2+\frac{4}{9}b^2+\frac{4}{9}ab\times\frac{1}{2}$．

整理得到 $36=a^2+4b^2+2ab\geqslant 4ab+2ab=6ab$，

当且仅当 $a=2\sqrt{3}, b=\sqrt{3}$ 时等号成立，故 $(ab)_{\max}=6$．

故 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$．（12 分）

19. 解：(1) 此几何体的体积 $V=\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 2=\frac{8\pi}{3}$．（2 分）

(2) 因为 $AP\perp BE$，$AB\perp BE$，$AB, AP\subset$ 平面 $ABP$，$AB\cap AP=A$，所以 $BE\perp$ 平面 $ABP$．又 $BP\subset$ 平面 $ABP$，所以 $BE\perp BP$．又 $\angle EBC=120^\circ$，因此 $\angle CBP=30^\circ$．（6 分）

(3) 以 $B$ 为坐标原点，分别以 $BE$，$BP$，$BA$ 所在的直线为 $x$，$y$，$z$ 轴，建立如图所示的空间直角坐标系．

由题意得 $A(0,0,3)$，$E(2,0,0)$，$G(1,\sqrt{3},3)$，$C(-1,\sqrt{3},0)$．

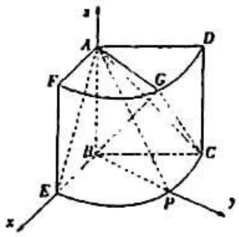
故 $\overrightarrow{AE}=(2,0,-3)$，$\overrightarrow{AG}=(1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CG}=(2,0,3)$．

（7 分）

设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 $AEG$ 的一个法向量．

由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AG}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}2x_1-3z_1=0\\ x_1+\sqrt{3}y_1=0\end{cases}$，取 $z_1=2$，则 $x_1=3$，$y_1=-\sqrt{3}$，

得平面 $AEG$ 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(3,-\sqrt{3},2)$．（9 分）




设 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 是平面 $ACG$ 的一个法向量．

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AG}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CG}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x_2+\sqrt{3}y_2=0\\ 2x_2+3z_2=0\end{cases}$，

取 $z_2=-2$，则 $x_2=3$，$y_2=-\sqrt{3}$，

得平面 $ACG$ 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(3,-\sqrt{3},-2)$．（11 分）

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{2}$．

因此二面角 $E-AG-C$ 的大小为 $60^\circ$．（12 分）

20. 解：(1) 由题意知相关系数 $r=$

$\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{700}{\sqrt{80\times 8\,000}}=\frac{7}{8}=0.875$，

（2 分）

因为 $y$ 与 $x$ 的相关系数接近 1，所以 $y$ 与 $x$ 之间具有较强的线性相关关系，可用线性回归模型进行拟合．

（3 分）

(2) 由题意可得，$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{700}{80}$

$=8.75$，（5 分）

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=\frac{4\,000}{20}-8.75\times\frac{80}{20}=200-8.75\times 4$

$=165$．

所以 $\hat{y}=8.75x+165$．（6 分）

(3) 以频率估计概率，购买一台甲款垃圾处理机器节约政府支持的垃圾处理费用 $X$（单位：万元）的分布列为：

| $X$ | $-50$ | 0 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.1 | 0.4 | 0.3 | 0.2 |

$E(X)=-50\times 0.1+0\times 0.4+50\times 0.3+100\times 0.2=30$（万元）．（9 分）

购买一台乙款垃圾处理机器节约政府支持的垃圾处理费用 $Y$（单位：万元）的分布列为：

| $Y$ | $-30$ | 20 | 70 | 120 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.3 | 0.4 | 0.2 | 0.1 |

$E(Y)=-30\times 0.3+20\times 0.4+70\times 0.2+120\times 0.1=25$（万元）．（11 分）

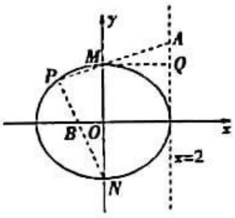
因为 $E(X)>E(Y)$，所以该县城选择购买一台甲款垃圾处理机器更划算．（12 分）

21. 解：(1)由题意可知，椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的半焦距 $c=1$，

将 $M(0,\sqrt{3})$ 代入椭圆方程得 $\frac{(\sqrt{3})^2}{b^2}=1$，即 $b^2=3$.

所以 $a^2=b^2+c^2=4$，故椭圆 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. （3 分）

(2)根据题意，设 $P(x_0,y_0)$，$x_0\neq 0$，又 $M(0,\sqrt{3})$，$N(0,-\sqrt{3})$，如图所示，则直线 $PM$、$PN$ 的斜率均存在，且 $k_{PM}=\frac{y_0-\sqrt{3}}{x_0}$，$k_{PN}=\frac{y_0+\sqrt{3}}{x_0}$.




所以直线 $PM$ 方程为 $y=\frac{y_0-\sqrt{3}}{x_0}x+\sqrt{3}$.

又直线 $PM$ 与直线 $x=2$ 交于点 $A$，

所以 $A\left(2,\frac{2(y_0-\sqrt{3})}{x_0}+\sqrt{3}\right)$. （6 分）

又因为 $Q(2,\sqrt{3})$，可得 $|AQ|=\left|\frac{2(y_0-\sqrt{3})}{x_0}\right|$，$|MQ|=2$.

所以 $\triangle AMQ$ 的面积为 $S_{\triangle AMQ}=\frac{1}{2}|AQ||MQ|=2\left|\frac{y_0-\sqrt{3}}{x_0}\right|$.

同理，直线 $PN$ 方程为 $y=\frac{y_0+\sqrt{3}}{x_0}x-\sqrt{3}$.

直线 $PN$ 与 $x$ 轴交于点 $B$，易得 $B\left(\frac{\sqrt{3}x_0}{y_0+\sqrt{3}},0\right)$.

则 $|OB|=\left|\frac{\sqrt{3}x_0}{y_0+\sqrt{3}}\right|$，$|ON|=\sqrt{3}$，

所以 $\triangle OBN$ 的面积为 $S_{\triangle OBN}=\frac{1}{2}|OB||ON|=\frac{3}{2}\left|\frac{x_0}{y_0+\sqrt{3}}\right|$. （8 分）

要证明 $\triangle AMQ$ 和 $\triangle OBN$ 面积相等，即证明 $2\left|\frac{y_0-\sqrt{3}}{x_0}\right|=\frac{3}{2}\left|\frac{x_0}{y_0+\sqrt{3}}\right|$ 成立即可.

整理得 $3x_0^2=4|y_0^2-3|$，由点 $P$ 在椭圆 $C$ 上可知，$y_0<\sqrt{3}$，即 $3x_0^2=4(3-y_0^2)$，得 $3x_0^2+4y_0^2=12$，

即 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$ 显然成立.

所以 $\triangle AMQ$ 和 $\triangle OBN$ 面积相等. （12 分）

22. 解：(1) $f'(x)=a(1+\ln x)$，$g'(x)=-e^x-xe^x+e=-(x+1)e^x+e$.

所以 $f'(1)=a$，$g'(1)=-e$，由题意可知 $f'(1)\cdot g'(1)=a\cdot(-e)=-1$，则 $a=\frac{1}{e}$. （2 分）

所以 $f'(x)=\frac{1}{e}(1+\ln x)=0$，得 $x=\frac{1}{e}$.

所以 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 时，$f'(x)<0$，则 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 是 $f(x)$ 的减区间，$x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，

则 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 是 $f(x)$ 的增区间；

又 $f(1)=0$，且当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 0$，则 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<0$，$x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$；

令 $H(x)=g'(x)=-(x+1)e^x+e$，

则 $H'(x)=-(x+2)e^x<0$ 恒成立，

所以 $g'(x)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上单调递减，

又 $g'(0)=-1+e>0$，$g'(1)=-e<0$，则 $\exists x_0\in(0,1)$，使得 $g'(x_0)=0$ 恒成立，

所以 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)>0$，则 $(0,x_0)$ 是 $g(x)$ 的增区间，$x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，则 $(x_0,+\infty)$ 是 $f(x)$ 的减区间； （4 分）

又 $g(1)=0$，且当 $x\to 0$ 时，$g(x)\to 0$，则 $x\in(0,1)$ 时，$g(x)>0$，$x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)<0$，

故 $h(x)=\begin{cases}f(x),0<x<1\\ g(x),x\geqslant 1\end{cases}$，

则 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 是 $h(x)$ 的减区间，$\left(\frac{1}{e},1\right)$ 是 $h(x)$ 的增区间，$(1,+\infty)$ 是 $h(x)$ 的减区间.

故 $h(x)$ 的单调递增区间为 $\left(\frac{1}{e},1\right)$. （6 分）

(2)证明：若 $a=e$，$f'(x)=e(1+\ln x)$，

$g'(x)=-(x+1)e^x+e$，则 $h(x)=\begin{cases}ex\ln x,0<x<1\\ -xe^x+ex,x\geqslant 1\end{cases}$.

且 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 是 $h(x)$ 的减区间，$\left(\frac{1}{e},1\right)$ 是 $h(x)$ 的增区间，$(1,+\infty)$ 是 $h(x)$ 的减区间，所以当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to 0$，$h\left(\frac{1}{e}\right)=-1$，$h(1)=0$. （7 分）

设 $h(x_1)=h(x_2)=h(x_3)=et\in(-1,0)$.

因为 $g'(x)=-(x+1)e^x+e$，所以 $g'(1)=-e$，

而 $g(1)=0$，

$g(x)$ 在 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y=-e(x-1)$，

令 $k(x)=-e(x-1)-h(x)$

$=xe^x-2ex+e$，$x\in(1,+\infty)$，

$k'(x)=(x+1)e^x-2e>0$，则 $k(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上单调递增，而 $k(1)=0$，

所以 $k(x)>0$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 时恒成立，

即 $x\in(1,+\infty)$ 时，$-e(x-1)>h(x)$，

设 $y=-e(x-1)$ 与 $y=et$ 交点横坐标为 $x_3'$，

则 $x_3'=1-t$，有 $x_3<x_3'$.

因为 $x_1\ln x_1=x_2\ln x_2=t\Rightarrow x_1\ln x_1=mx_1\ln(mx_1)\Rightarrow\ln x_1=\ln(mx_1)^m\Rightarrow x_1=(mx_1)^m$，可得 $x_1=m^{\frac{m}{1-m}}$，

所以 $t=x_1\ln x_1=x_1\left(\frac{-m}{m-1}\right)\ln m$，又 $x_2=mx_1$，

所以 $x_1+x_2+x_3<x_1+x_2+x_3'=x_1+x_2+1-t$

$=x_1\left[1+m+\left(\frac{m}{m-1}\right)\ln m\right]+1$. （9 分）

令 $\varphi(m)=1+m+\left(\frac{m}{m-1}\right)\ln m$，则 $\varphi'(m)=\frac{m(m-1)-\ln m}{(m-1)^2}$，令 $p(m)=m(m-1)-\ln m$，则

$p'(m)=2m-1-\frac{1}{m}=\frac{2m^2-m-1}{m}=\frac{(2m+1)(m-1)}{m}$.

当 $m\in(1,e)$ 时，可得 $p'(m)>0$ 恒成立，$p(m)$ 在 $m\in(1,e)$ 上单调递增，

$p(m)>p(1)=0$，即 $\varphi'(m)>0$ 恒成立，$\varphi(m)$ 在 $m\in(1,e)$ 上单调递增，

在 $m\in(1,e)$，$\varphi(m)<\varphi(e)=e+1+\frac{e}{e-1}$，

所以 $x_1+x_2+x_3<x_1\left[1+m+\left(\frac{m}{m-1}\right)\ln m\right]+1<x_1\left(e+1+\frac{e}{e-1}\right)+1=x_1\left(\frac{e^2}{e-1}\right)+1+x_1$，

所以 $x_2+x_3<x_1\left(\frac{e^2}{e-1}\right)+1$. （12 分）