2023年高三2月大联考（全国乙卷）

理科数学·全解全析及评分标准

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	A	B	C	D	B	C	C	A	D	A	B

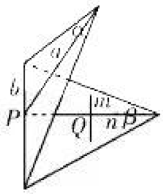
1．B【解析】由$z(2+\mathrm{i})=8-\mathrm{i}$，得$z=\dfrac{8-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{15-10\mathrm{i}}{5}=3-2\mathrm{i}$，所以$\bar{z}=3+2\mathrm{i}$．故选B．

2．A【解析】由$\dfrac{x-1}{x-3}\le 0$，得$(x-1)(x-3)\le 0$且$x-3\ne 0$，解得$1\le x<3$，所以$M=\{x|1\le x<3\}$．

由$y=x^2+2$，得$y\ge 2$，所以$N=\{y|y\ge 2\}$，所以$M\cap N=[2,3)$．故选A．

3．B 【解析】根据全称命题的否定为特称命题，可知$\neg p$为“$\exists x>1$，$x(x-1)<0$”，故选B．

4．C 【解析】A：a可能在平面β内，所以A错误；B：a与m可能平行，从而α与β可能相交，所以B错误；C：$a/\!/\beta$且$b/\!/\beta\Rightarrow\beta/\!/\alpha\Rightarrow m/\!/\alpha$，所以C正确；D：如图，考虑正方形沿对角线折叠，另一条对角线折起后形成的两条直线，以及折痕和一条半平面内与折痕平行的直线，它们符合垂直关系，但两个半平面不一定垂直，所以D错误．故选C．



5．D 【解析】因为$\alpha\in(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2})$，所以$2\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$．又$\sin 2\alpha=\dfrac{4}{5}$，所以$\cos 2\alpha=-\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}=-\dfrac{3}{5}$，所以$1-2\sin^2\alpha=-\dfrac{3}{5}$，解得$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$（负值舍去）．故选D．

6．B 【解析】由函数的值域，可以排除A.由函数的奇偶性，可以排除D.C: $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，令$g(x)=x\cos x-\sin x$，则$g'(x)=-x\sin x$．当$x\in(0,\pi)$时，$g'(x)<0$恒成立，所以$g(x)$在$(0,\pi)$上单调递减．因为$g(0)=0$，所以$g(x)<g(0)=0$在$(0,\pi)$上恒成立，所以当$x\in(0,\pi)$时，$f'(x)<0$恒成立，所以$f(x)$在$(0,\pi)$上单调递减，所以排除C．故选B．

7．C【解析】（1）若“糕点制作”安排1名女教师，有C_2^1种不同的安排方法，后续项目分两类：

①若“自行车修理”安排1名男教师，则余下4人安排到另两个项目，每个项目2人，有$C_4^1C_4^2C_2^2$种不同的安排方法;来源：高三答案公众号

②若“自行车修理”安排2名男教师，则余下3人，1人安排到“绿植修剪”，2人安排到“蔬菜种植”，有$C_4^2C_3^1C_2^2$

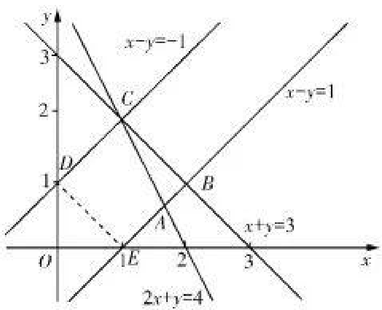
种不同的安排方法. 来源：高三答案公众号

（2）若“糕点制作”安排 2 名女教师，则“自行车修理”只能安排 1 名男教师，余下 3 人，1 人安排到“绿植修剪”，2 人安排到“蔬菜种植”，有 $C_2^2C_4^1C_3^1C_2^2$ 种不同的安排方法，

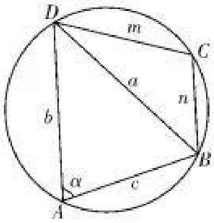
所以，一共有 $C_2^1(C_4^1C_4^2C_2^2+C_4^2C_3^1C_2^2)+C_2^2C_4^1C_3^1C_2^2=96$ 种不同的安排方法. 故选 C.

8. C【解析】$f(x)=2\sin x(\cos x-\sin x)+1=\sin 2x-2\sin^2 x+1=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\cos(2x-\frac{\pi}{4})$，所以 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，将 $x=\frac{\pi}{8}$ 代入 $f(x)=\sqrt{2}\cos(2x-\frac{\pi}{4})$，得 $f(\frac{\pi}{8})=\sqrt{2}\cos(2\times\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$，故 A 和 D 错误；将 $y=\sqrt{2}\cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到 $y=\sqrt{2}\cos 2(x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(2x-\frac{\pi}{2})=\sqrt{2}\sin 2x$ 的图象，所以 B 错误；由 $2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $\frac{\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{8}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $[\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}]$ 是 $f(x)$ 的一个单调递减区间，所以 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8})$ 上单调递减. 故选 C.

9. A【解析】由题意，知 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x\ge 0,y\ge 0\\x-y\le 1\\x-y\ge -1\\x+y\le 3\end{cases}$，作出不等式组表示的平面区域，如图中阴影部分所示（五边形 $OEBCD$（包含边界）），作出直线 $2x+y=4$，易得 $A(\frac{5}{3},\frac{2}{3})$，$B(2,1)$，$C(1,2)$，$D(0,1)$，$E(1,0)$，连接 DE，则非负数 x，y 对应的可行域的面积为 $S_{\triangle ODE}+S_{正方形BCDE}=\frac{1}{2}\times1\times1+\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\frac{5}{2}$，事件“$2x+y\ge 4$”对应的可行域的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}\times\sqrt{2}=\frac{1}{3}$，所以所求概率为 $P=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{15}$. 故选 A.



10. D【解析】由题图（2）得，圆形木板的直径为 $\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$. 设截得的四边形木板为 $ABCD$，$\angle A=\alpha$，$AB=c$，$BD=a,AD=b,BC=n,CD=m$，如图.



由 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$ 得 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$. 在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理，得 $\dfrac{a}{\sin\alpha}=2\times\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$，解得 $a=4\sqrt{5}$.

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$，

$\therefore b^2+c^2-\dfrac{6}{5}bc=80$，配方，得 $(b+c)^2-\dfrac{16}{5}bc=80\ (*)$.

$\because bc\le(\dfrac{b+c}{2})^2$，$\therefore(*)$式可化为 $(b+c)^2-\dfrac{16}{5}bc\ge\dfrac{1}{5}(b+c)^2$，

$\therefore\dfrac{1}{5}(b+c)^2\le 80$，$\therefore b+c\le 20$，当且仅当 $b=c=10$ 时等号成立.

同理，在 $\triangle CBD$ 中，得 $m+n\le 10$，当且仅当 $m=n=5$ 时等号成立，

$\therefore$ 这块四边形木板周长的最大值为 30．故选 D.

11．A 【解析】设 $|MF_1|=m$，$|MF_2|=n$，椭圆 C 的半焦距为 c，则 $m+n=2a$，$mn=4c^2$，所以 $a^2-4c^2=(\dfrac{m+n}{2})^2-mn=(\dfrac{m-n}{2})^2=(m-a)^2$．因为 $a-c\le m\le a+c$，所以 $a^2-4c^2=(m-a)^2\in[0,c^2]$，即 $4c^2\le a^2\le 5c^2$，则 $\dfrac{1}{5}\le e^2\le\dfrac{1}{4}$，所以 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}\le e\le\dfrac{1}{2}$．故选 A.

12．B【解析】（1）先比较 a,b：

$\because a=0.6\mathrm{e}^{0.4}=\mathrm{e}^{0.4}(1-\ln\mathrm{e}^{0.4})$，$b=2-\ln 4=2(1-\ln 2)$，

$\therefore$ 可以构造函数 $f(x)=x(1-\ln x)$，则 $a=f(\mathrm{e}^{0.4})$，$b=f(2)$.

对 $f(x)$ 求导，得 $f'(x)=-\ln x$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

$\because 1=\mathrm{e}^0<\mathrm{e}^{0.4}<\mathrm{e}^{0.5}<2$，$\therefore f(\mathrm{e}^{0.4})>f(2)$，即 $a>b$.

（2）再比较 b,c：

$\because b-c=4-\ln 4-\mathrm{e}=4-2\ln 2-\mathrm{e}$.

$\therefore$ 可以构造函数 $g(x)=2x-x\ln x-\mathrm{e}$，则 $g'(x)=1-\ln x$，

当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,\ \mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，$\therefore g(x)_{\max}=g(\mathrm{e})=0$，

$\therefore g(2)<0$，$\therefore b-c<0$，即 $b<c$.

（3）最后比较 a,c：

$\because a-c=(1-0.4)e^{0.4}-e+2$，

$\therefore$ 可以构造函数 $h(x)=(1-x)e^{x}-e+2$，则 $h'(x)=-xe^{x}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

又 $\because h(0.5)=0.5e^{0.5}-e+2$，且 $e^{0.5}>1.6$，$\therefore h(0.5)>0$，

$\therefore h(0.4)>h(0.5)>0$，$\therefore a-c>0$，即 $a>c$.

综上得，$a>c>b$．故选 B.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{3\pi}{4}$ 【解析】设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 θ，由已知，得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-3,1)$，所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=-3\times1+1\times(-2)=-5$．又 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$，所以 $\cos\theta=\frac{-5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\theta=\frac{3\pi}{4}$．故填 $\frac{3\pi}{4}$.

14. $y=\pm2\sqrt{2}x$ 【解析】设双曲线 M 的半焦距为 c，由双曲线的定义，知 $\frac{|PF_1|-|PF_2|}{|F_1F_2|}=\frac{1}{3}$，即 $\frac{2a}{2c}=\frac{1}{3}$，所以 $\frac{c}{a}=3$，所以 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{a}=2\sqrt{2}$，所以双曲线 M 的渐近线方程为 $y=\pm2\sqrt{2}x$.故填 $y=\pm2\sqrt{2}x$.

15. -1 【解析】因为 $y=f(2x-1)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{4}$ 对称，所以 $f[2(\frac{1}{4}+x)-1]=f[2(\frac{1}{4}-x)-1]$，即 $f(2x-\frac{1}{2})=f(-2x-\frac{1}{2})$，所以 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称，故 $f(x-1)=f(-x)$ (*).

由 $f(2x+2)=-f(2x)$，得 $f(2x)=-f(2x-2)$，所以 $f(2x+2)=f(2x-2)$，所以 $f(2x)=f(2x-4)$，所以 $f(x)$ 的周期为4,所以 $f(2022)=f(2)$.由(*)式得 $f(2)=f(3-1)=f(-3)=f(-4+1)=f(1)=-1$.故填 -1.

16. $\sqrt{3}$ 【解析】由三视图得三棱锥 $P-ABC$ 的直观图，不妨设三棱锥如图所示，其中 $\triangle ABC$ 为直角三角形，两直角边为 AB，BC，平面 $PBC\perp$ 平面 ABC，且 $\triangle PBC$ 为正三角形.

由已知，得三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径 $R=\sqrt{3}$.

设 $AB=a$，$BC=b$，三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的球心为 O，D 为 BC 的中点，O_1 为 AC 的中点，$\triangle PBC$ 的中心为 O_2，则 $OO_1\perp$ 平面 ABC，$PD\perp$ 平面 ABC，$OO_2\perp$ 平面 PBC.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OO_2P$ 中，$OO_2^2+PO_2^2=OP^2$，

即$(\frac{1}{2}a)^2+(\frac{\sqrt{3}b}{3})^2=R^2=3$，即$b^2=9-\frac{3}{4}a^2$，

所以三棱锥$P-ABC$的体积为

$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ab\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}b=\frac{\sqrt{3}}{12}ab^2=\frac{\sqrt{3}}{16}(12a-a^3)$ $(0<a\le 2\sqrt{3})$.

令$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{16}(12x-x^3)$ $(0<x\le 2\sqrt{3})$，

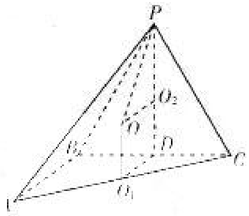
则$V'(x)=\frac{3\sqrt{3}}{16}(4-x^2)=\frac{3\sqrt{3}}{16}(2+x)(2-x)$.

当$0<x<2$时，$V'(x)>0$；当$2<x\le 2\sqrt{3}$时，$V'(x)<0$，

所以$V(x)$在$(0,2)$上单调递增，在$(2,2\sqrt{3}]$上单调递减，

所以$V(x)$在$x=2$处取得极大值，也是最大值，

所以，当$a=2$时，三棱锥$P-ABC$的体积V最大，且最大值为$\sqrt{3}$. 故填$\sqrt{3}$.



说明：

第13题写成$135°$也给分.

第14题写成$2\sqrt{2}x\pm y=0$，$y\pm 2\sqrt{2}x=0$，$x\pm\frac{\sqrt{2}}{4}y=0$，$\frac{\sqrt{2}}{4}y\pm x=0$或$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}y$也给分.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17.（12分）

【解析】（1）由题意知，$11.6+13.0+12.8+11.8+12.0+12.8+11.5+12.7+13.4+12.4+12.9+12.8+13.2+13.5+11.2+12.6+11.8+12.8+13.2+12.0$（1分）

$=250.0$，（2分）来源：高三答案公众号

所以$\overline{x}=\frac{250}{20}=12.5$，（3分）

$s^2=\frac{1}{20}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_{20}-\overline{x})^2]$（4分）

$=\frac{1}{20}[x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{20}^2-2\overline{x}(x_1+x_2+\cdots+x_{20})+20\overline{x}^2]=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}x_i^2-\overline{x}^2$（5 分）

$=0.43$.

所以估计该种植大户收获的果实长度的平均数和方差分别为 12.5,0.43.（6 分）

（2）由表中数据得，样本中果实长度不小于 12cm 的频率为$\frac{3}{4}$.（8 分）

由于收获的果实数量巨大，所以 X 近似服从二项分布，即 $X\sim B(4,\frac{3}{4})$，（10 分）

所以 $E(X)=4\times\frac{3}{4}=3, D(X)=4\times\frac{3}{4}\times(1-\frac{3}{4})=\frac{3}{4}$.（11 分）

所以据此可以估计，X 的数学期望与方差分别为 3，$\frac{3}{4}$.（12 分）

说明：

第一问：

1. 写出 $11.6+13.0+\cdots+12.0$ 给 1 分；
2. 得到“250”给 1 分；
3. 4 分段：若最后结果正确，不写全公式不扣分，最后结果错误，正确写出公式给 1 分；
4. 5 分段：若最后结果正确，不写个公式不扣分，最后结果错误，正确写出公式给 1 分.

第二问：

1.11 分段，$E(X),D(X)$ 都求正确，给 1 分，最后用文字叙述 X 的数学期望与方差都正确给 1 分；

2.若 $E(X),D(X)$ 求解正确一个且用文字叙述 X 的数学期望或方差正确一个，给 1 分.

18.（12 分）

【解析】（1）因为对任意 m，$n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+m}=a_n+a_m$，所以 $a_{n+1}=a_n+a_1$，（1 分）

所以数列 $\{a_n\}$ 是公差 $d=a_1$ 的等差数列，$a_n=na_1$.（2 分）

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，因为 $b_1=a_1$，$b_2-a_2=0$，$b_3-a_3=1$，所以 $\begin{cases}a_1q-2a_1=0\\a_1q^2-3a_1=1\end{cases}$.

又因为 $b_1=a_1\neq0$，解得 $b_1=a_1=1$，$q=2$，所以 $a_n=n$，$b_n=2^{n-1}$.（6 分）

（2）因为 $c_n=\frac{n}{2^{n-1}}$，

所以 $T_n=\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}$，$\frac{T_n}{2}=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^n}$，（8 分）

两式相减，得 $\frac{T_n}{2}=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{n}{2^n}=\frac{1\times(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$，

所以 $T_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$.（12 分）

说明：

第一问：

1.1 分段为考生写出“$a_{n+1}=a_n+a_1$ ”或“数列$\{a_n\}$是等差数列”；

2.6 分段为$a_n=n$，$b_n=2^{n-1}$ 写出一个给 1 分.

第二问：

1.写出$c_n=\frac{n}{2^{n-1}}$ 给 1 分，写出$\frac{T_n}{2}$正确给 1 分，相减正确给 1 分，求和正确给 1 分，化简正确给 1 分，结果正确给 1 分；

2.若结果正确，$\frac{1\times(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^n}$ 和$2-\frac{n+2}{2^n}$都没有写，不扣分；

3.若$\frac{T_n}{2}$展开没有写，结果正确，只给 1 分，中间过程分全部扣掉.

19.（12 分）

【解析】（1）如图，取AD的中点F，连接PF，EF.

$\because PA=PD$，$\therefore PF\perp AD$.

$\because$平面$PAD\perp$平面$ABCD$，平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD$，$PF\subset$平面PAD，

$\therefore PF\perp$平面$ABCD$.（1 分）

又$BD\subset$平面$ABCD$，$\therefore PF\perp BD$.（2 分）

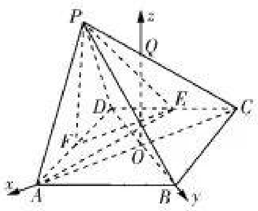
$\because$四边形$ABCD$为菱形，$\therefore AC\perp BD$.

$\because$点E，F分别为CD，AD的中点，$\therefore EF/\!/AC$，$\therefore EF\perp BD$.（3 分）

$\because PF\perp BD$，$EF\perp BD$，$PF\cap EF=F$，PF，$EF\subset$平面PEF，

$\therefore BD\perp$平面PEF.（4 分）

又$PE\subset$平面PEF，$\therefore BD\perp PE$.（5 分）



（2）记$AC\cap BD=O$，则$OA\perp OB$.

由（1）知，$PF\perp$平面$ABCD$，则$PF\perp OA$，$PF\perp OB$.

过点O作$OQ/\!/PF$，则OA，OB，OQ两两垂直.（6 分）

如图，以 OA，OB，OQ 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，则 $A(4,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(-4,0,0)$，$E(-2,-1,0)$，$P(2,-1,2)$，（7 分）

$\therefore \overrightarrow{PA}=(2,1,-2)$，$\overrightarrow{AE}=(-6,-1,0)$，$\overrightarrow{PB}=(-2,3,-2)$，$\overrightarrow{PC}=(-6,1,-2)$.

设平面 PAE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{m}=0\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{m}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}2x_1+y_1-2z_1=0\\ -6x_1-y_1=0\end{cases}$，

令 $x_1=1$，则 $y_1=-6$，$z_1=-2$，

所以 $\boldsymbol{m}=(1,-6,-2)$ 是平面 PAE 的一个法向量.（9 分）

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}-2x_2+3y_2-2z_2=0\\ -6x_2+y_2-2z_2=0\end{cases}$，

令 $x_2=1$，则 $y_2=-2$，$z_2=-4$，

所以 $\boldsymbol{n}=(1,-2,-4)$ 是平面 PBC 的一个法向量.（10 分）

设平面 PBC 与平面 PAE 所成锐二面角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{|1\times1+(-6)\times(-2)+(-2)\times(-4)|}{\sqrt{1^2+(-6)^2+(-2)^2}\times\sqrt{1^2+(-2)^2+(-4)^2}}=\frac{\sqrt{861}}{41}.$$

所以平面 PBC 与平面 PAE 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{861}}{41}$.（12 分）

说明：

第一问：

1.1 分段没有“平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PF\subset$ 平面 PAD”不扣分；

2.2 分段没有“又 $BD\subset$ 平面 $ABCD$”不扣分；

3.4 分段没有“$PF\cap EF=F$，PF，$EF\subset$ 平面 PEF”不扣分；

4.5 分段没有“又 $PE\subset$ 平面 PEF”不扣分.

第二问：

1. 6 分段必须有三线两两垂直的叙述或简证，否则扣 1 分；
2. 7 分段可以写“如图建系”且正确写出至少 2 个点坐标即可得 1 分；
3. 9 分段和 10 分段法向量正确，过程省略，不扣分；
4. 12 分段求解正确即使无公式也给满分；若求解错误，写对公式，给 1 分.

20.（12 分）

【解析】（1）由$\begin{cases} y^2=2px \\ (x-4)^2+y^2=12 \end{cases}$，（1 分）

得$(x-4)^2+2px=12$，即$x^2-(8-2p)x+4=0$．（2 分）

由对称性可得关于x的方程有两个相等的正的实数根，

所以$\Delta=(8-2p)^2-16=0$，且$8-2p>0$，

解得$p=2$，（3 分）来源：高三答案公众号

所以抛物线C的方程为$y^2=4x$．（4 分）

（2）由题意，知直线AB的斜率不为 0，故设直线AB的方程为$x=my+4$，（5 分）

如图，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$．

将直线AB的方程代入圆E的方程中，消去x，得$(m^2+1)y^2=12$，（6 分）

所以$y^2=\dfrac{12}{m^2+1}$，所以$y_2=-y_1$，且$y_1^2=y_2^2=\dfrac{12}{m^2+1}$．（7 分）

直线OA的方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1}x$，代入抛物线方程$y^2=4x$，

消去x，得$y^2=\dfrac{4x_1}{y_1}y$，解得$y=\dfrac{4x_1}{y_1}$或$y=0$．所以$y_3=\dfrac{4x_1}{y_1}$．（8 分）

同理，得$y_4=\dfrac{4x_2}{y_2}$，（9 分）

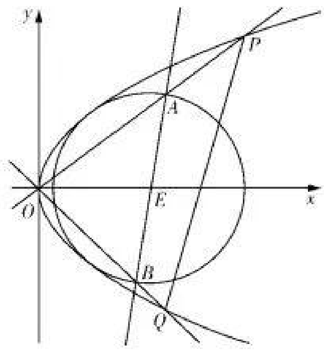
所以$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|\sin\angle AOB}{\frac{1}{2}\cdot|OP|\cdot|OQ|\sin\angle POQ}=\dfrac{|OA|}{|OP|}\cdot\dfrac{|OB|}{|OQ|}=\dfrac{|y_1|}{|y_3|}\cdot\dfrac{|y_2|}{|y_4|}=\dfrac{|y_1|}{|\frac{4x_1}{y_1}|}\cdot\dfrac{|y_2|}{|\frac{4x_2}{y_2}|}$（10 分）

$=\dfrac{(y_1y_2)^2}{16|x_1x_2|}=\dfrac{(y_1y_2)^2}{16|(my_1+4)(my_2+4)|}=\dfrac{(y_1y_2)^2}{16|m^2y_1y_2+4m(y_1+y_2)+16|}$（11 分）

$=\dfrac{(y_1y_2)^2}{16|m^2y_1y_2+16|}=\dfrac{(-\frac{12}{m^2+1})^2}{16|m^2(-\frac{12}{m^2+1})+16|}$

$=\dfrac{9}{4(m^2+1)(m^2+4)}=\dfrac{9}{4(m^2+\frac{5}{2})^2-9}$，

所以当$m=0$时，$\dfrac{S_1}{S_2}$取得最大值，为$\dfrac{9}{16}$．（12 分）



说明：

第一问：

1.1 分段为圆与抛物线联立；

2.2 分段为化简为 x 的方程.

第二问：

1.5 分段为设直线 1 分；

2.6 分段为将直线 AB 的方程代入圆 E 的方程；

3.7 分段为求出 $y^2=y_3^2=\dfrac{12}{m^2+1}$；

4.8 分段和 9 分段为求出 y_3, y_4，各 1 分；

5.10 分段为求出 $\dfrac{|y_1|}{|y_3|}\cdot\dfrac{|y_2|}{|y_4|}$；

6.11 分段为代入求出 $\dfrac{(y_1y_2)^2}{16|m^2y_1y_2+4m(y_1+y_2)+16|}$；

7."显然直线 AB 的斜率不为 0，"这句话必须有，否则最多得 11 分.

21.（12 分）

【解析】（1）$\because f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=x(\mathrm{e}^x-ax-1)$，

$\therefore g(x)=\mathrm{e}^x-ax-1(x\neq 0)$，$g(a)=\mathrm{e}^a-a^2-1$.（1 分）

令 $h(x)=\mathrm{e}^x-x^2-1(x>0)$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^x-2x$.

令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x-2x(x>0)$，则 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x-2$.（2 分）

由 $\varphi'(x)=0$，得 $x=\ln 2$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,\ln 2)$ 时，$\varphi'(x)<0$；当 $x\in(\ln 2,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x \in (0,+\infty)$ 时， $\varphi(x) \geq \varphi(\ln 2) = 2-2\ln 2 > 0$ ，即当 $x \in (0,+\infty)$ 时， $h'(x) > 0$ ，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

$\because a > 0$ ， $\therefore h(a) > h(0) = 0$ ，

$\therefore$ 当 $a > 0$ 时， $g(a) > 0$ 恒成立.（4 分）

（2）由（1）知， $f'(x) = x(\mathrm{e}^x - ax - 1)$.

设 $m(x) = \mathrm{e}^x - ax - 1$ ($x \in \mathbf{R}$)，则 $m'(x) = \mathrm{e}^x - a$.

① 当 $a \leq 0$ 时， $m'(x) > 0$ 恒成立， $\therefore m(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

$\because m(0) = 0$ ， $\therefore$ 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时， $m(x) < 0$ ，从而 $f'(x) > 0$ ；当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $m(x) > 0$ ，从而 $f'(x) > 0$.

又 $\because f'(0) = 0$ ， $\therefore \forall x \in \mathbf{R}$ ，都有 $f'(x) \geq 0$ ， $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，此时 $f(x)$ 无极值.（5 分）

②当 $a > 0$ 时，由 $m'(x) = 0$ ，得 $x = \ln a$ ，

$\therefore$ 当 $x \in (-\infty, \ln a)$ 时， $m'(x) < 0$ ；当 $x \in (\ln a, +\infty)$ 时， $m'(x) > 0$ ，

$\therefore m(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x = \ln a$ 时， $m(x)$ 取得最小值，且最小值为 $m(\ln a) = a - a\ln a - 1$.（6 分）

令 $F(x) = x - x\ln x - 1$ ($x > 0$)， $F'(x) = -\ln x$ ，

$\therefore$ 当 $x \in (0,1)$ 时， $F'(x) > 0$ ；当 $x \in (1,+\infty)$ 时， $F'(x) < 0$ ，

$\therefore F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

$\because F(1) = 0$ ， $\therefore$ 当 $x \in (0,+\infty)$ 时， $F(x) \leq 0$ ，

即当 $a > 0$ 时， $m(\ln a) = a - a\ln a - 1 \leq 0$ (当且仅当 $a = 1$ 时等号成立).（7 分）

（i）当 $a = 1$ 时， $m(\ln a) = m(0) = 0$ ，且当 $x \neq 0$ 时，都有 $m(x) > 0$ ，

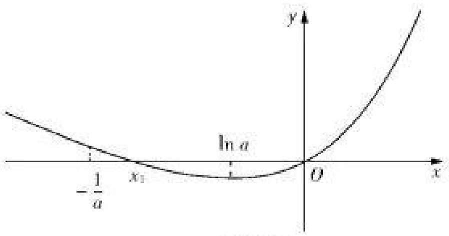
$\therefore f'(0) = 0$ ，且当 $x \in (-\infty,0)$ 时， $f'(x) < 0$ ；当 $x \in (0,+\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极小值，符合题意.（8 分）

（ii）当 $0 < a < 1$ 时， $\ln a < 0$ ，且 $m(\ln a) < 0$.

$\because m(-\dfrac{1}{a}) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{a}} > 0$ ， $m(0) = 0$ ， $\therefore y = m(x)$ 的图象大致如图（1）.



图(1)

由函数的单调性及零点存在定理，得在$(-\frac{1}{a},\ln a)$内存在唯一的实数x_1，使得$m(x_1)=0$，

∴当$x\in(-\infty,x_1)$时，$m(x)>0$，从而$f'(x)<0$；

当$x\in(x_1,0)$时，$m(x)<0$，从而$f'(x)>0$；

当$x\in(0,+\infty)$时，$m(x)>0$，从而$f'(x)>0$，

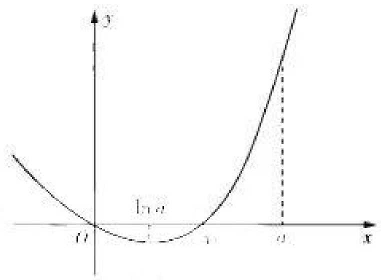
∴$f(x)$在$(-\infty,x_1)$上单调递减，在$(x_1,+\infty)$上单调递增，

∴$f(x)$在$x=x_1$处取得极小值，符合题意.（10分）

（iii）当$a>1$时，$\ln a>0$，且$m(\ln a)<0$.

∵$m(0)=0$，由（1）知，$m(a)>0$，

∴$y=m(x)$的图象大致如图（2）.



图(2)

由函数的单调性及零点存在定理，得在$(\ln a,a)$内存在唯一的实数x_2，使$m(x_2)=0$，

∴当$x\in(-\infty,0)$时，$m(x)>0$，从而$f'(x)<0$；

当$x\in(0,x_2)$时，$m(x)<0$，从而$f'(x)<0$；

当$x\in(x_2,+\infty)$时，$m(x)>0$，从而$f'(x)>0$，

∴$f(x)$在$(-\infty,x_2)$上单调递减，在$(x_2,+\infty)$上单调递增，

∴$f(x)$在$x=x_2$处取得极小值，符合题意.

综上，当$f(x)$存在极小值时，a的取值范围为$(0,+\infty)$.（12分）

说明：

第一问：

1.求出$g(a)$，1分；

2.对$h(x)$求2次导，1分；

3.证出$h'(x)>0$，1分；

4.最后证出 $g(a)>0$，1 分.

第二问：来源：高三答案公众号

1.证明“当 $a\le 0$ 时，$f(x)$ 无极值”，1 分；

2.当 $a>0$ 时，求出 $m(x)$ 最小值为 $m(\ln a)=a-a\ln a-1$，1 分；证明 $m(\ln a)\le 0$，1 分；

3.当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，1 分；

4.当 $0<a<1$ 时 $f(x)$ 有极小值，2 分；

5.当 $a>1$ 时 $f(x)$ 有极小值，1 分；

6.综上，1 分.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（10 分）[选修 4-4：坐标系与参数方程]

【解析】（1）$\because \sqrt{2}\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})+m=0$，

$\therefore \sqrt{2}\rho(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\theta)+m=0$，（1 分）

即 $\rho\sin\theta+\rho\cos\theta+m=0$，（2 分）

又 $\because \rho\sin\theta=y,\rho\cos\theta=x$，（3 分）

$\therefore x+y+m=0$，即直线 l 的直角坐标方程为 $x+y+m=0$．（4 分）

（2）依题意，知曲线 C 的普通方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$，（5 分）

其与 x 轴的交点分别为 $A(-1,0)$，$B(1,0)$．（6 分）

设点 $M(x,y)$，由 $|MA|=\sqrt{3}|MB|$，得 $\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{3[(x-1)^2+y^2]}$，（7 分）

即 $x^2+y^2-4x+1=0$，（8 分）

$\therefore (x-2)^2+y^2=3$，它表示圆心为 $E(2,0)$，半径为 $\sqrt{3}$ 的圆.

$\because$ 点 $M(x,y)$ 既在直线 l 上，又在圆 E 上，$\therefore \frac{|2+m|}{\sqrt{2}}\le\sqrt{3}$，即 $|2+m|\le\sqrt{6}$，（9 分）

$\therefore -2-\sqrt{6}\le m\le -2+\sqrt{6}$，

即实数 m 的取值范围为 $[-2-\sqrt{6},\ -2+\sqrt{6}]$．（10 分）

说明：

第一问：

1.$\sqrt{2}\rho\cos(\theta-\frac{\pi}{4})$ 的展开正确，给 1 分；

2.直线l的直角坐标方程为$x+y+m=0$求解正确，$\rho\sin\theta=y$, $\rho\cos\theta=x$没有写不扣分；直线l的直角坐标方程求解错误，写$\rho\sin\theta=y$, $\rho\cos\theta=x$给1分.

第二问：

1.正确求出曲线C的普通方程给1分；

2.正确求出A，B点的坐标给1分；

3.代入$|MA|=\sqrt{3}|MB|$正确，给1分；

4.得到圆的方程$x^2+y^2-4x+1=0$或$(x-2)^2+y^2=3$给1分；

5.只要得到$-2-\sqrt{6}\le m\le -2+\sqrt{6}$给1分.

23.（10分）[选修4-5：不等式选讲]

【解析】(1) 当$a=2$时，原不等式可化为$2|x-1|-|x-2|>2$.（1分）

当$x\ge 2$时，原不等式可化为$2(x-1)-(x-2)>2$，整理得$x>2$，所以$x>2$.（2分）

当$1<x<2$时，原不等式可化为$2(x-1)+(x-2)>2$，整理得$x>2$，所以此时不等式的解集是空集.（3分）

当$x\le 1$时，原不等式可化为$-2(x-1)+(x-2)>2$，整理得$x<-2$，所以$x<-2$.（4分）

综上，当$a=2$时，不等式$f(x)>2$的解集为$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.（5分）

（2）若存在$x\in[2,4]$，使得$f(x)\le 0$，即存在$x\in[2,4]$，使得$|ax-2|\le x-2$ ①.

①式可转化为$-(x-2)\le ax-2\le x-2$，（6分）

即$\begin{cases}-x+2\le ax-2\\ ax-2\le x-2\end{cases}$ ②.（7分）

因为$x\in[2,4]$，所以②式可化为$\begin{cases}a\ge \dfrac{4}{x}-1\\ (a-1)x\le 0\end{cases}$ ③，（8分）

若存在$x\in[2,4]$使得③式成立，则$\begin{cases}a\ge (\dfrac{4}{x}-1)_{\min}\\ a-1\le 0\end{cases}$，即$\begin{cases}a\ge 0\\ a\le 1\end{cases}$，（9分）

所以$0\le a\le 1$，即a的取值范围为$[0,1]$.（10分）

说明：

第一问：

1.把$a=2$代入正确得1分；三种情况讨论各1分；综上1分；

2.当$1<x<2$时，得$x>2$，没有得出不等式的解集是空集．扣掉1分；但是答案正确，答案分不扣，这

1 分仍然给.

第二问：

1.转化 1 分，化简 1 分，2 种讨论各 1 分，综上 1 分；

2.或方法：

即 $-x+2\le ax-2$ 且 $ax-2\le x-2$，（7 分）

对于 $-x+2\le ax-2$，即 $a\ge\frac{4}{x}-1\ (\exists x\in[2,4])$，

所以 $a\ge(\frac{4}{x}-1)_{\min}=\frac{4}{4}-1=0$．（8 分）

对于 $ax-2\le x-2$，即 $(a-1)x\le 0\ (\exists x\in[2,4])$，

所以 $a-1\le 0$，即 $a\le 1$．（9 分）

综上，$0\le a\le 1$，即 a 的取值范围为 $[0,1]$．（10 分）