

数学试题(理科)

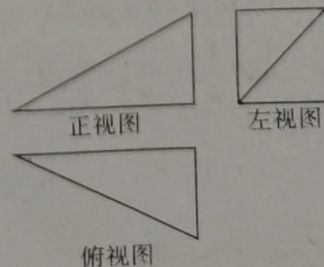
(测试时间:120 分钟 卷面总分:150 分)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将答题卡交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{x \mid |x-2| < 3\}$, 则
 - A. $5 \in A \cap B$
 - B. $5 \subseteq A \cup B$
 - C. $A \subseteq B$
 - D. $\{7\} \subseteq A \cup B$
2. 已知 $z(1-2i) = \bar{z} + 2$, 则 $z =$
 - A. $1+i$
 - B. $1-i$
 - C. $-1+i$
 - D. $-1-i$
3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{DB}$, E 为 CD 的中点, $\overrightarrow{AE} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, 则 $\lambda =$
 - A. 2
 - B. 1
 - C. $\frac{1}{2}$
 - D. $\frac{1}{3}$
4. 某城市有一个面积为 1 km^2 的矩形广场,该广场为黄金矩形(它的宽与长的比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$),现在在中央设计一个矩形草坪,四周是等宽的步行道,能否设计恰当的步行道的宽度使矩形草坪为黄金矩形? 则下列选项正确的是
 - A. 步行道的宽度 10 m
 - B. 步行道的宽度 20 m
 - C. 步行道的宽度 30 m
 - D. 草坪不可能为黄金矩形
5. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-1 \geq 0, \\ x-y+1 \geq 0, \\ 2x-y-2 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = (x-4)^2 + (y-1)^2$ 的取值范围是
 - A. $[10, 25]$
 - B. $[5, 16]$
 - C. $[\sqrt{10}, 4]$
 - D. $[\sqrt{5}, 4]$
6. 一个几何体的三视图如图所示,其中正视图和俯视图是直角边长分别为 2 和 4 的两个全等的直角三角形. 则这个几何体的外接球的体积为
 - A. $4\sqrt{3}\pi$
 - B. $8\sqrt{6}\pi$
 - C. $\frac{16}{3}\sqrt{2}\pi$
 - D. $32\sqrt{3}\pi$



7. 已知点 $A(-1, 2)$, $B(0, a)$, 若直线 AB 关于 $y=a$ 的对称直线 l 与圆 $C: (x+3)^2 + y^2 = 18$ 交于 M, N 两点, 则 $|MN|$ 的最小值为
- A. $2\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{10}$ D. $4\sqrt{2}$
8. 中国共产党第二十次全国代表大会于 2022 年 10 月 16 日在北京召开, 10 月 17 日各代表团分组讨论党的二十大报告. 某媒体 5 名记者到甲、乙、丙 3 个小组进行宣传报道, 每名记者只去 1 个小组, 每个小组最多两名记者, 若记者 A 不去甲组, 则不同的安排方法共有
- A. 15 种 B. 30 种 C. 60 种 D. 90 种
9. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $2b\sin B = (2c+a)\sin C + (2a+c)\sin A$, 则 $\sin A + \sin C$ 的最大值为
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2
10. 已知实数 x, y 满足 $x > 0, y > 0$, 且 $x + \frac{y}{2} + \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 5$, 则 $2x + y$ 的最大值为
- A. 10 B. 8 C. 4 D. 2
11. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$ 且都为连续函数, 记 $g(x) = f'(x)$, 若 $f(1-x), g(x)$ 均为奇函数, 设 $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ 为 $f(x)$ 图象上的不同两点, $C(x_3, g(x_3)), D(x_4, g(x_4))$ 为 $g(x)$ 图象上的不同两点, 其中 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in (3, 7)$, 若 $x_1 + x_2 = 10, g(x_3) = g(x_4)$, 则 $f(x_1) + f(x_2) + x_3 + x_4 =$
- A. 0 B. 5 C. 10 D. 20
12. 椭圆 C 的两个焦点为 F_1, F_2 , 以 C 的短轴为直径的圆记为 O , 过 F_1 作圆 O 的切线与 C 交于 M, N 两点, 且 $\cos \angle F_1 N F_2 = -\frac{3}{5}$, 则 C 的离心率为
- A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{\sqrt{65}}{9}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 某校第一次模拟考试的成绩 X 近似地服从正态分布 $N(90, \sigma^2)$, 若 $P(X < 100) = 0.92$, 则 $P(80 < X < 100) =$ _____.
14. 记函数 $f(x) = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 T , 且 $y = f(x)$ 的图象关于 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 当 ω 取最小值时, $f\left(\frac{T}{2}\right) =$ _____.
15. 过抛物线 $C: y = 2x^2$ 准线上的点 P 作 C 的两条切线, 切点分别为 A, B , 则 $k_{PA} \cdot k_{PB} =$ _____.
16. 已知函数 $f(x) = |e^x - 1|$, $x_1 < 0 < x_2 \leq 2$, 函数 $f(x)$ 的图象在点 $A(x_1, f(x_1))$ 和点 $B(x_2, f(x_2))$ 处的两条切线互相垂直, 且分别交 y 轴于 M, N 两点, 则 $|MN|$ 的取值范围是 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (本小题满分 12 分)

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_2=1$, 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 其中 $b_1=a_2, b_2=a_3, b_3=a_6$.

(1) 求 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

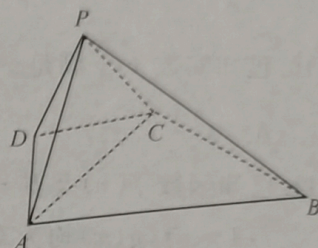
(2) 若 $b_3 \neq a_3$, 求 $\left\{\frac{S_n}{n} + b_n\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AB \parallel CD, AD=CD=BC=PA=PC=\frac{1}{2}AB, BC \perp PA$.

(1) 证明: 平面 $PBC \perp$ 平面 PAC ;

(2) 若 $PB=2\sqrt{2}$, 求点 B 到平面 PAD 的距离.



19. (本小题满分 12 分)

为了调查抖音平台某直播间带货服务的满意程度, 现随机调查了年龄在 20 岁至 70 岁的 100 人, 他们年龄的频数分布和“满意”的人数如下表:

年龄/岁	$[20, 30)$	$[30, 40)$	$[40, 50)$	$[50, 60)$	$[60, 70]$
频数	15	25	30	20	10
满意	13	20	27	16	4

(1) 根据上述统计数据填下面的 2×2 列联表, 并判断是否有 95% 的把握认为年龄低于 50 岁的人和年龄不低于 50 岁的人对服务态度有差异;

	年龄低于 50 岁的人数	年龄不低于 50 岁的人数	合计
满意			
不满意			
合计			

(2) 若以频率估计概率, 以 100 人的样本数据来估计全国玩抖音的市民 (假设年龄均在 20 岁至 70 岁) 的总体数据, 若从在全国范围内任选 5 人, 记 X 表示抽到“满意”的人数, 求 X 的分布列与数学期望.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.01	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

20. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与双曲线 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 的渐近线相同, 点 $A(2\sqrt{2}, 1)$ 在 C 上, F_2 为 C 的右焦点.

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知 M 是直线 $l: x = t$ 上的任意一点, 是否存在这样的直线 l , 使得过点 M 的直线与 C 相切于点 N , 且以 MN 为直径的圆过点 F_2 ? 若存在, 求出直线 l 的方程, 若不存在, 说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 3a \ln x - (a-3)x, a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $g(x) = f(x) - 3 \ln x - \sin x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程;

(2) 设 x_1, x_2 是 $h(x) = f(x) - (3a-2) \ln x - 3x$ 的两个不同零点, 证明: $a(x_1 + x_2) > 4$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

数学上有很多美丽的曲线令人赏心悦目, 例如, 极坐标方程 $\rho = a(1 + \cos \theta) (a > 0)$ 表示的曲线为心形线, 它对称优美, 形状接近心目中的爱心图形. 以极点 O 为原点, 极轴为 x 轴的正

半轴建立直角坐标系, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$

(1) 求直线 l 的极坐标方程和心形线的直角坐标方程;

(2) 已知点 P 的极坐标为 $(2, 0)$, 若 P 为心形线上的点, 直线 l 与心形线交于 A, B 两点 (异于 O 点), 求 $\triangle ABP$ 的面积.

23. (本小题满分 10 分) 【选修 4-5: 不等式选讲】

已知 a, b 均为正数, 且 $a^2 + 2b^2 = 6$, 证明:

(1) $a + 2b \leq 3\sqrt{2}$;

(2) $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \geq \frac{3}{2}\sqrt{2}$.