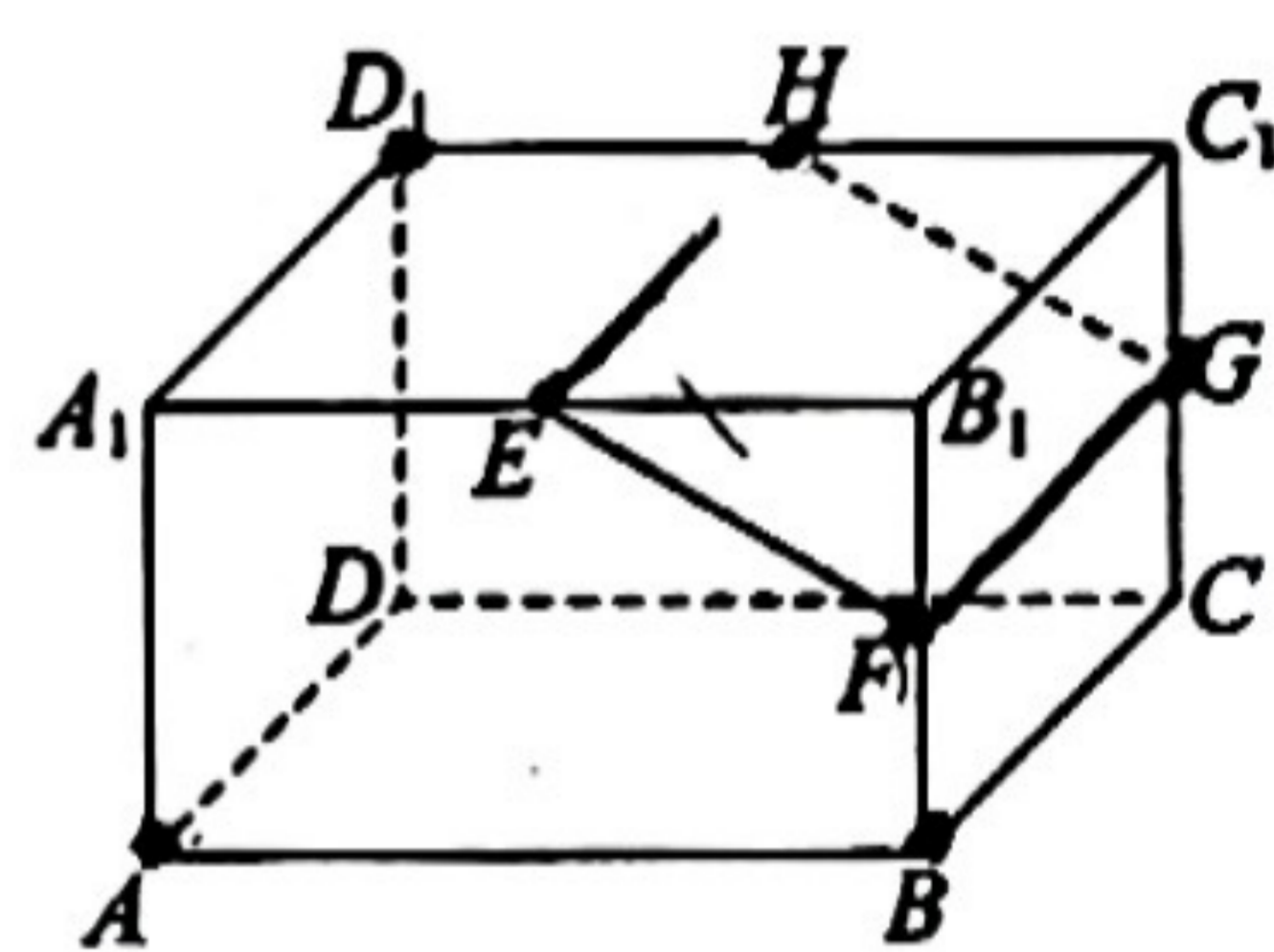


4. 为了研究某公司工作人员人数 x (单位:名) 和月销售量 y (单位:万元) 的关系,从该公司随机抽取 10 名工作人员,根据测量数据的散点图可以看出 y 与 x 之间有线性相关关系,设其回归直线方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$. 已知 $\sum_{i=1}^{10} x_i = 320$, $\sum_{i=1}^{10} y_i = 2400$, $\hat{b} = 5$. 若该公司工作人员为 25 名,据此估计其月销售量为

- A. 195
B. 200
C. 205
D. 210

5. 如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,若 E, F, G, H 分别是棱 $A_1B_1, BB_1, CC_1, C_1D_1$ 上的动点,且 $EH \parallel FG$,则必有

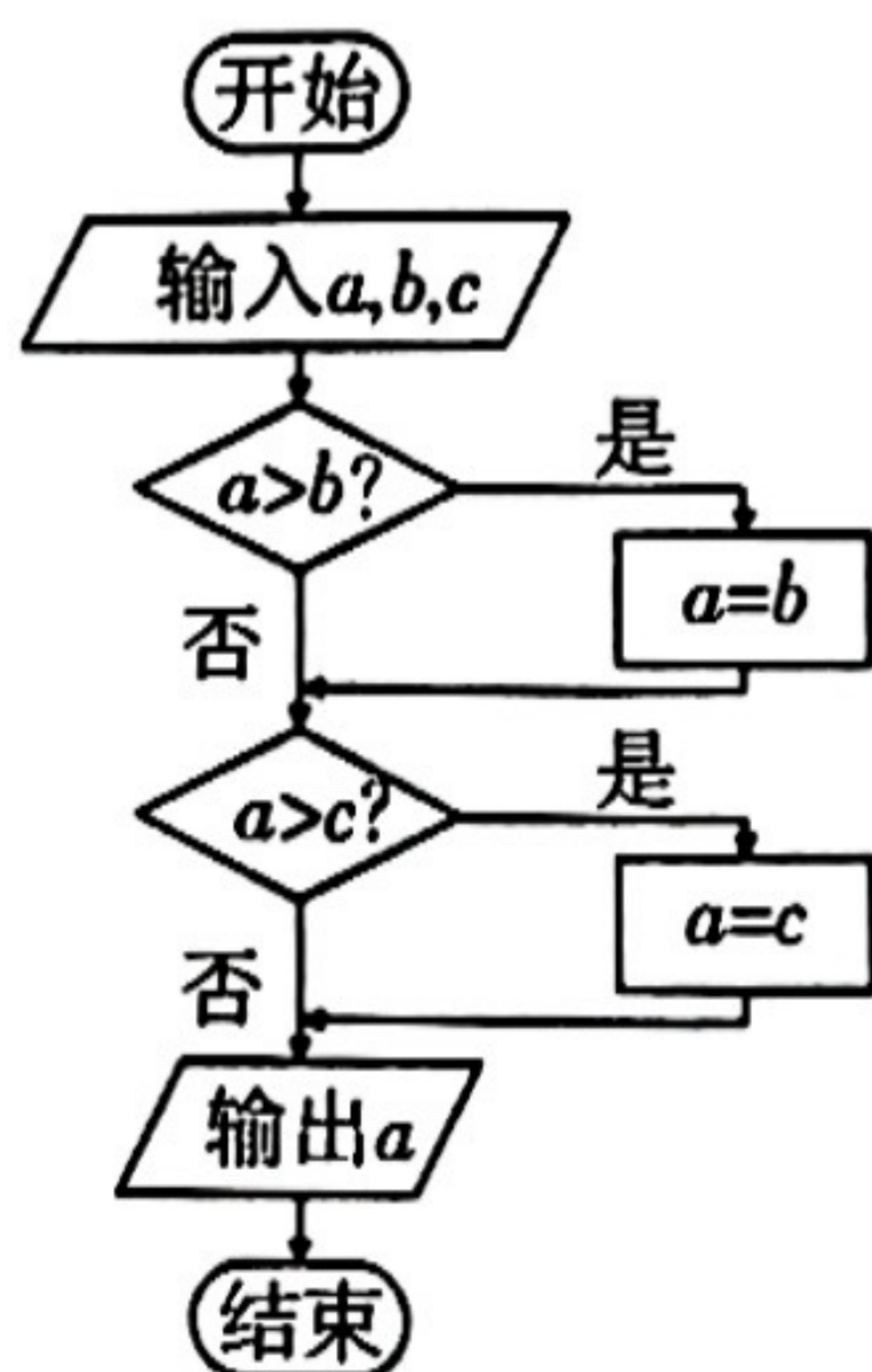
- A. $BD_1 \perp EH$
B. $AD \parallel FG$
C. 平面 $BB_1D_1D \perp$ 平面 $EFGH$
D. 平面 $A_1BCD_1 \parallel$ 平面 $EFGH$



6. 已知向量 a, b 满足 $|a| = 1, b = (m, 2-m), |a| = |b| \cos \theta$ (θ 为 a 与 b 的夹角), 则 $|a-b|$ 的最小值为

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
B. $\sqrt{2}$
C. 1
D. 2

7. 如图所示的程序框图,输入 3 个数据 $a = \log_5 2, b = \log_8 3, c = \frac{1}{2}$, 则输出的 a 为



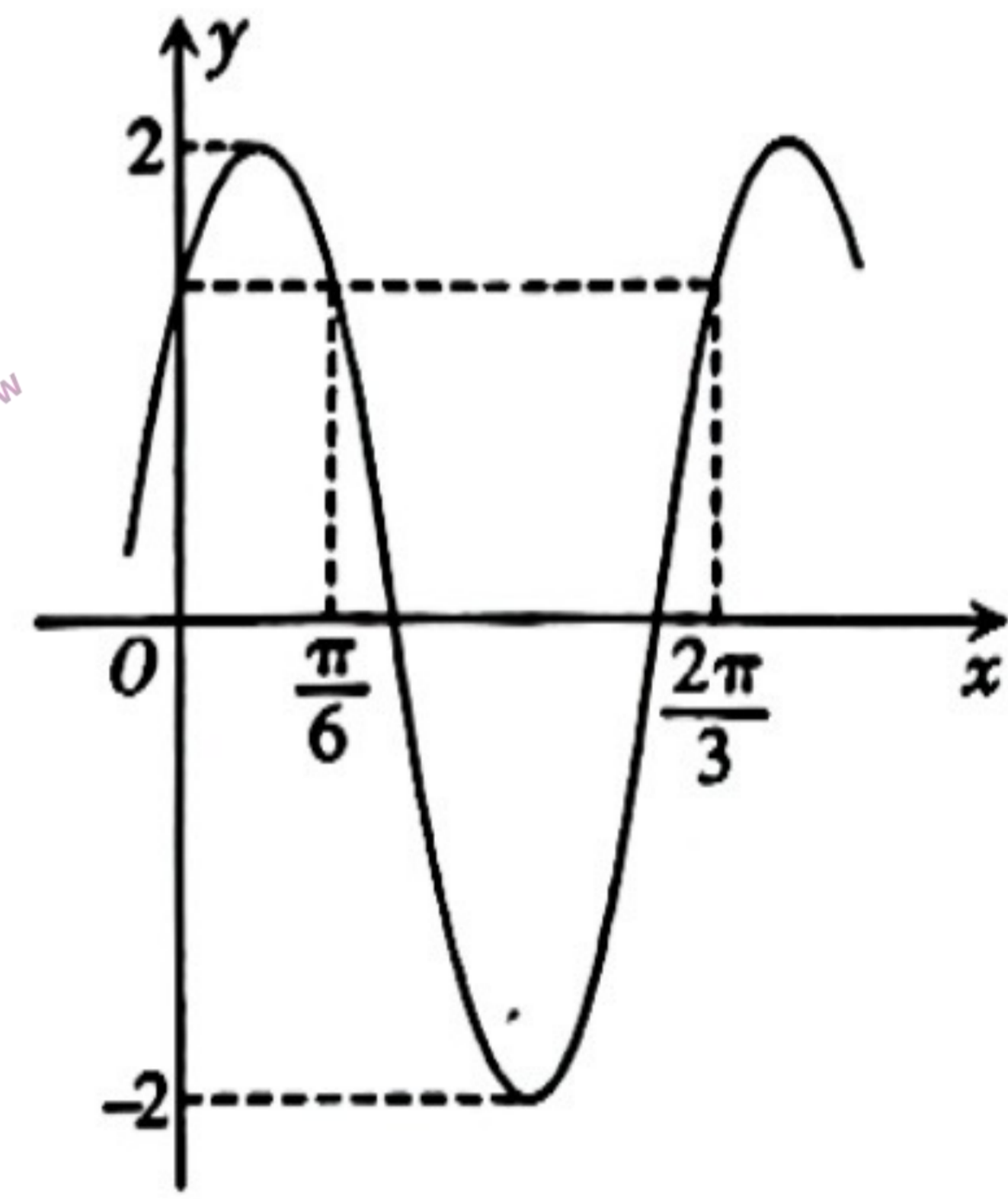
- A. 1
B. $\frac{1}{2}$
C. $\log_8 3$
D. $\log_5 2$

8. 已知 A, B 为双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两个焦点, C, D 在双曲线上, 且四边形 $ABCD$ 为正方形, 则 $\frac{b^2}{a^2} =$

- A. $2\sqrt{2}+2$
- B. $\sqrt{2}+1$
- C. $2\sqrt{2}-2$
- D. $\sqrt{2}-1$

9. 如图所示的曲线为函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象, 将 $y=f(x)$ 图象上的所有点的横坐标伸长到原来的 $\frac{3}{2}$ 倍, 再将所得曲线向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度, 得到函数 $y=g(x)$ 的图象, 则

- A. 直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 为 $g(x)$ 图象的一条对称轴
- B. 点 $(\frac{3\pi}{8}, 0)$ 为 $g(x)$ 图象的一个对称中心
- C. 函数 $g(x)$ 的最小正周期为 2π
- D. 函数 $g(x)$ 在 $[\frac{5\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}]$ 上单调递减



10. 已知函数 $f(x) = \sin(2\omega x + \frac{\pi}{6}) + 2\cos^2 \omega x - 1 (\omega > 0)$ 在 $[0, \pi]$ 内有且仅有 2 个零点, 则 ω 的取值范围是

- A. $[\frac{5}{6}, \frac{4}{3})$
- B. $(\frac{5}{6}, \frac{4}{3}]$
- C. $[\frac{5}{3}, \frac{13}{6})$
- D. $(\frac{5}{3}, \frac{13}{6}]$

11. 已知四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 的长分别为 $2\sqrt{3}$ 和 6, 且 BD 垂直平分 AC 把 $\triangle ACD$ 沿 AC 折起, 使得点 D 到达点 P , 则三棱锥 $P-ABC$ 体积最大时, 其外接球半径为

- A. 2
- B. $\sqrt{5}$
- C. $\sqrt{10}$
- D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

12. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的以 2 为周期的偶函数, 在区间 $[1, 2]$ 上单调递减, 且满足 $f(\pi) = 1$, $f(2\pi) = 0$, 则不等式组 $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq f(x) \leq 1 \end{cases}$ 的解集为

- A. $[\frac{1}{2}, 1]$
- B. $[0, 4-\pi]$
- C. $[2\pi-6, 1]$
- D. $[2\pi-6, 4-\pi]$

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分,第 13 题~第 21 题为必考题,每个试题考生都必须作答,第 22 题~第 23 题为选考题,考生根据要求作答.

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分.

13. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{8} = 1$ 的焦距为 8,则 C 的离心率 $e =$ _____.

14. 魏晋时期数学家刘徽在他的著作《九章算术注》中,称一个正方体内两个互相垂直的内切圆柱所围成的几何体为“牟合方盖”(如图),在注

中,刘徽对“牟合方盖”有以下的描述:“取立方棋八枚,皆令立方一寸,积之为立方二寸.规之为圆困,径二寸,高二寸.又复横规之,则其形有似牟合



方盖矣.八棋皆似阳马,圆然也.按合盖者,方率也.丸其中,即圆率也.”牟合方盖的发现有着重大的历史意义.通过计算得知正方体内切球的体积与“牟合方盖”的体积之比应为 $\pi:4$.若在该正方体内任取一点,则此点取自“牟合方盖”内的概率是_____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ,若 $A = \frac{\pi}{3}, b + 2a = 4a \sin^2 \frac{C}{2}$,则 $\sin C =$ _____.

16. 对于三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$,给出定义:设 $f'(x)$ 是 $y = f(x)$ 的导数, $g(x)$ 是 $y = f'(x)$ 的导数,若方程 $g(x) = 0$ 有实数解 x_0 ,则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的“拐点”,可以发现,任何一个三次函数都有“拐点”.设函数 $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 3$,则 $g(\frac{1}{2023}) +$

$$g(\frac{2}{2023}) + \dots + g(\frac{2022}{2023}) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

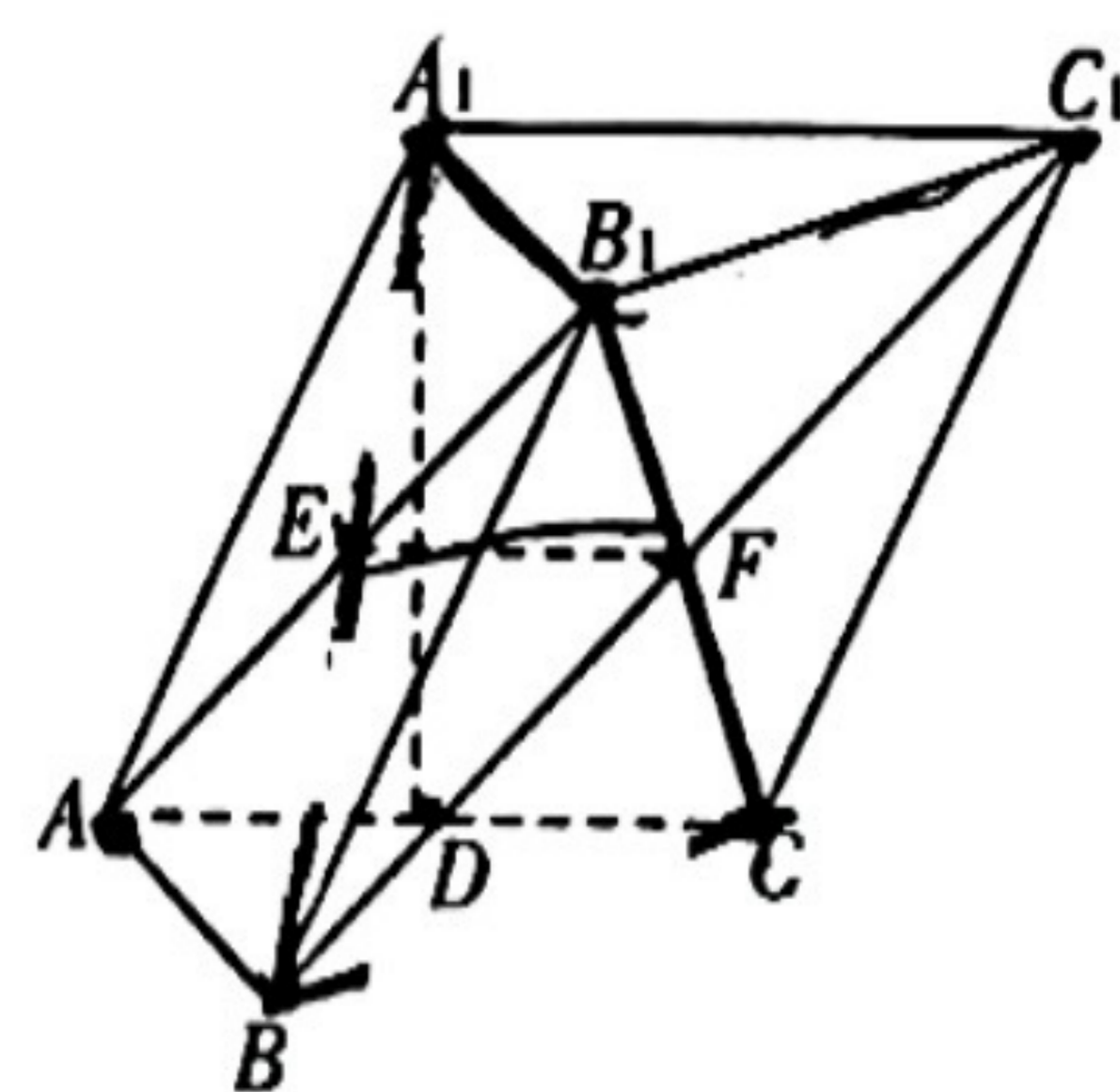
三、解答题:共 70 分,解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. (12 分)已知非零数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且满足 $S_n = p(a_n - 1)$,其中 p 为常数,且 $p \neq 1$.

(1) 证明:数列 $\{a_n\}$ 是等比数列;

(2) 若 $p = 2, b_n = \frac{S_n + 2}{S_n S_{n+1}}$,数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,证明: $T_n < \frac{1}{2}$.

18. (12分) 如图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长均为 1, 且点 A_1 在底面上的射影是 AC 的中点 D . AB_1 与 A_1B 交于点 E , BC_1 与 B_1C 交于点 F .



- (1) 证明: $A_1B \perp B_1C$;
 (2) 求几何体 $ABCFE$ 的体积.

19. (12分) 从 2023 年起, 某市中考考试科目将改为“3 科必考 + 3 科选考 + 体育”. 其中 3 科必考科目为语文、数学和外语, 满分都为 100 分. 3 科选考科目应在物理和生化(生物、化学合为一科)两科中选择 1 或 2 科, 在历史、地理和思想品德三科中选择 1 或 2 科, 每科原始满分都为 100 分; 所选的三科成绩, 将由高到低分别按照 100%, 80%, 60% 的系数折算成最后分数, 三科折算后的实际满分为 100 分, 80 分, 60 分, 体育成绩为 40 分, 中考满分为 580 分. 已知甲、乙两名考生在选考科目中选择每一科的可能性都相同.

(1) 若甲、乙两名考生的中考考试科目和原始分数成绩单如下:

科目	语文	数学	英语	物理	生化	地理	体育
甲的分数	92	97	96	100	80	60	40
乙的分数	92	97	96	80	80	80	40

请分别计算甲、乙两名考生的中考总分;

(2) 求甲考生在选考科目中选考历史的概率.

20. (12分) 已知 $f(x) = xe^x - a(x + \ln x)$.

- (1) 当 $a=e$ 时, 求 $f(x)$ 的最小值;
 (2) 当 $a=1$ 时, 有 $f(x) \geq (b-2)x+1$ 恒成立, 求 b 的取值范围.

21. (12分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 G 的准线方程为 $y=-2$.

- (1) 求抛物线 G 的标准方程;
 (2) 过抛物线的焦点 F 作互相垂直的两条直线 l_1 和 l_2 , l_1 与抛物线交于 P, Q 两点, l_2 与抛物线交于 C, D 两点, M, N 分别是线段 PQ, CD 的中点, 求 $\triangle FMN$ 面积的最小值.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分,作答时请用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑.

[选修 4—4:坐标系与参数方程]

22. (10 分) 已知曲线 C 的方程为 $\begin{cases} x=2\cos\theta+2 \\ y=2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为

极轴, 建立极坐标系.

(1) 求曲线 C 的极坐标方程;

(2) 过 $M(1,1)$ 作直线 l 交曲线 C 于 P, Q 两点, 且 $|PM|:|PQ|=2:3$, 求直线 l 的斜率.

[选修 4—5:不等式选讲]

23. (10 分) 已知函数 $f(x) = |x+a| + |x+4a|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \leq 7$ 的解集;

(2) 对于任意的正实数 m, n , 且 $n=1-3m$, 若 $(m^2+n)f(x) - mn \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.