

大庆实验中学实验一部 2020 级高（三）5 月份得分训练（四）

数学试题

一、单选题

1. 已知全集  $U = \mathbf{R}$ . 设集合  $A = \{x | \log_2(x+2) \leq 1\}$ ,  $B = \{x | \frac{1}{x} < 1\}$ , 则  $(\complement_U A) \cup B = ( \quad )$

- A.  $\{x | -2 < x < 0\}$     B.  $\{x | x \leq -2 \text{ 或 } x > 1\}$     C.  $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 0\}$     D.  $\{x | x \neq 0\}$

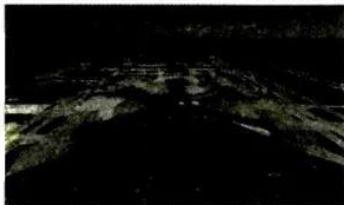
2. 复数  $z$  满足  $(1+i)^2 z = 2-4i$ , 则复数  $z = ( \quad )$

- A.  $-2+i$     B.  $1-2i$     C.  $-2-i$     D.  $2+i$

3. 已知  $a, b$  为两条不同的直线,  $\alpha, \beta$  为两个不同的平面, 则下列命题中正确的是 ( )

- A. 若  $a // b, b // \alpha$ , 则  $a // \alpha$     B. 若  $a // b, a \perp \alpha, b // \beta$ , 则  $\alpha \perp \beta$   
C. 若  $a // \alpha, b // \beta, \alpha // \beta$ , 则  $a // b$     D. 若  $a // \alpha, b // \beta, \alpha \perp \beta$ , 则  $a \perp b$

4. 北京大兴国际机场的显著特点之一是各种弯曲空间的运用, 在数学上用曲率刻画空间弯曲性. 规定: 多面体的顶点的曲率等于  $2\pi$  与多面体在该点的面角之和的差 (多面体的面的内角叫做多面体的面角, 角度用弧度制), 多面体面上非顶点的曲率均为零, 多面体的总曲率等于该多面体各顶点的曲率之和. 例如: 正四面体在每个顶点有 3 个面角, 每个面角是  $\frac{\pi}{3}$ , 所以正四面体在每个顶点的曲率为  $2\pi - 3 \times \frac{\pi}{3} = \pi$ , 故其总曲率为  $4\pi$ . 已知多面体的顶点数  $V$ , 棱数  $E$ , 面数  $F$  满足  $V - E + F = 2$ , 则八面体的总曲率为 ( )



- A.  $3\pi$     B.  $\frac{10\pi}{3}$     C.  $4\pi$     D.  $5\pi$

5. 《莱茵德纸草书》是世界上最古老的数学著作之一. 书中有一道这样的题目: 把 100 个面包分给 5 个人, 使每人所得成等差数列, 且使较大的三份之和的  $\frac{1}{7}$  是较小的两份之和, 则最大的一份为 ( ).

- A.  $\frac{115}{3}$     B.  $\frac{118}{3}$     C.  $\frac{121}{3}$     D.  $\frac{124}{3}$

6. 已知非零向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足:  $|\vec{a} + 2\vec{b}| = |2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}|\vec{a}|$ , 则  $\vec{a}, \vec{b}$  夹角  $\theta$  的值为 ( )

- A.  $45^\circ$     B.  $60^\circ$     C.  $90^\circ$     D.  $120^\circ$

7. 已知  $F_1, F_2$  分别是双曲线  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点, 过  $F_1$  的直线分别交双曲线左、右两支于  $A, B$  两点, 点  $C$  在  $x$  轴上,  $\overline{CB} = 3\overline{F_2A}$ ,  $BF_2$  平分  $\angle F_1BC$ , 则双曲线  $\Gamma$  的离心率为 ( )

- A.  $\sqrt{7}$     B.  $\sqrt{5}$     C.  $\sqrt{3}$     D.  $\sqrt{2}$

8. 已知  $a = \ln 1.1, b = \frac{1}{11}, c = \sqrt{1.2} - 1$ , 则 ( )

- A.  $a > b > c$     B.  $a > c > b$     C.  $c > b > a$     D.  $c > a > b$

二、多选题

9. 下列命题中正确的是 ( )

- A. 设随机变量  $\xi$  服从正态分布  $N(\mu, 7)$ , 若  $P(\xi < 2) = P(\xi > 4)$ , 则  $\mu = 3$
- B. 经验回归方程为  $\hat{y} = 0.3 - 0.7x$  时, 变量  $x$  和  $y$  负相关
- C. 某学生在上学的路上要经过 4 个路口, 假设在各路口是否遇到红灯是相互独立的, 遇到红灯的概率都是  $\frac{1}{3}$ , 那么该生在上学路上到第 3 个路口首次遇到红灯的概率为  $\frac{4}{27}$
- D. 若  $X \sim B\left(7, \frac{1}{2}\right)$ , 则  $P(X = k)$  取最大值时  $k = 4$

10. 下列结论中, 正确的是 ( )

- A. 若  $xy > 0, 2x + y = xy$ , 则  $2x + y$  的最小值为 8
- B. 若  $x < -3$ , 则函数  $y = x + \frac{1}{x+3}$  的最小值为 -1
- C. 已知正数  $a, b$  满足  $ab = a + b$ , 则  $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} \geq 2$
- D. 已知  $a > 0, b > 0$ , 且  $a^2 + b = 1$ , 则  $a + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$

11. 已知抛物线  $C: x^2 = 8y$  的焦点为  $F$ ,  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$  是抛物线上两点, 下列结论正确的是 ( )

- A.  $|MF|$  的最小值为 2
- B. 若  $|MF| + |NF| = 12$ , 则线段  $MN$  的中点  $P$  到  $x$  轴的距离为 6
- C. 若直线  $MN$  过点  $F$ , 则  $x_1 x_2 = 4$
- D. 若  $\overrightarrow{MF} = \lambda \overrightarrow{NF}$ , 则  $|MN|$  的最小值为 8

12. 已知函数  $f(x) = \frac{x}{x-1} - 2^x (x > 1)$ ,  $g(x) = \frac{x}{x-1} - \log_2 x (x > 1)$  的零点分别为  $\alpha, \beta$ , 给出以下结论正确的是 ( )

- A.  $\alpha + \beta = \alpha\beta$
- B.  $\alpha + 2^\alpha = \beta + \log_2 \beta$
- C.  $\alpha + \beta > 4$
- D.  $\alpha - \beta > -1$

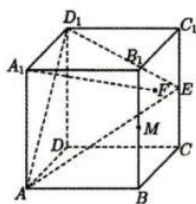
三、填空题

13. 写出与直线  $x = 1, y = 1$  和圆  $x^2 + y^2 = 1$  都相切的一个圆的方程 \_\_\_\_\_.

14. 2021 年 11 月 27 日奥密克戎毒株输入我国香港, 某医院委派甲、乙、丙、丁四名医生前往  $A, B, C$  三个小区做好防疫工作, 每个小区至少委派一名医生, 在甲派往  $A$  小区的前提下, 乙派往  $B$  小区的概率为 \_\_\_\_\_.

15. 化简  $\frac{1}{\cos 20^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} =$  \_\_\_\_\_.

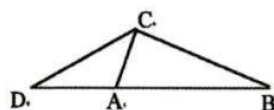
16. 如图, 已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 4,  $M, E$  分别是棱  $BB_1$  和  $CC_1$  的中点,  $F$  是侧面  $BCC_1B_1$  内的动点, 且  $A_1F \parallel$  平面  $D_1AE$ , 当  $\triangle A_1B_1F$  的外接圆面积最小时, 三棱锥  $A_1 - B_1MF$  的外接球的表面积为 \_\_\_\_\_.



四、解答题

17. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AC \perp BC$ . 延长  $BA$  到  $D$ , 使得  $AD = 2$ , 且  $\angle CDA = \frac{\pi}{6}$ .

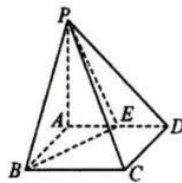
- (1) 若  $AC = \sqrt{2}$ , 求  $\triangle DBC$  的面积;
- (2) 当  $AC < AD$  时, 求  $\triangle ACD$  面积的取值范围.



18. 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  的底面是矩形,  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $PA=AB=1$ ,  $E$  为  $AD$  的中点.

(1) 求证: 平面  $PBC \perp$  平面  $PAB$ ;

(2) 若二面角  $P-BE-A$  为  $60^\circ$ , 求点  $C$  到平面  $PBE$  的距离.



19. 某市为了更好的了解全体中小学生对某病毒后的情况, 以便及时补充医疗资源. 从全市中小学生对中随机抽取了 100 名抗原检测为阳性的中小学生对监测其健康状况, 100 名中小学生对感染该病毒后的疼痛指数为  $X$ , 并以此为样本得到了如下图所示的表格:

疼痛指数 $X$	$X \leq 10$	$10 < X < 90$	$X \geq 90$
人数 (人)	10	81	9
名称	无症状感染者	轻症感染者	重症感染者

其中轻症感染者和重症感染者统称为有症状感染者.

(1) 统计学中常用  $L = \frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}$  表示在事件  $A$  发生的条件下事件  $B$  发生的似然比. 现从样本中随机抽取 1 名学生对, 记事件  $A$ : 该名学生对为有症状感染者, 事件  $B$ : 该名学生对为重症感染者, 求似然比  $L$  的值;

(2) 若该市所有抗原检测为阳性的中小学生对的疼痛指数  $X$  近似的服从正态分布  $N(50, \sigma^2)$ , 且  $P(X \geq 90) = \frac{1}{10}$ . 若从该市众多抗原检测为阳性的中小学生对中随机抽取 3 名, 设这 3 名学生对中轻症感染者人数为  $Y$ , 求  $Y$  的分布列及数学期望.

20. 已知  $\{a_n\}$  为等差数列,  $\{b_n\}$  为公比  $q \neq 1$  的等比数列, 且  $a_1 = b_1 = 1$ ,  $a_2 = b_2$ ,  $a_3 = b_3$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  的通项公式; (2) 设  $c_n = b_n + \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ , 求数列  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ ;

(3) 在 (2) 的条件下, 若对任意的  $n \geq 1$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $2T_n > (4n-3)t - \frac{1}{2n+1}$  恒成立, 求实数  $t$  的取值范围.

21. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ,  $A_1, A_2$  为椭圆  $C$  的左、右顶点,  $F_1, F_2$  为左、右焦点,  $Q$  为椭圆  $C$  上任意一点.

(1) 求直线  $QA_1$  和  $QA_2$  的斜率之积;

(2) 直线  $l$  交椭圆  $C$  于点  $M, N$  两点 ( $l$  不过点  $A_2$ ), 直线  $MA_2$  与直线  $NA_2$  的斜率分别是  $k_1, k_2$  且  $k_1 k_2 = -\frac{9}{4}$ , 直线  $A_1 M$  和直线  $A_2 N$  交于点  $P(x_0, y_0)$ .

① 探究直线  $l$  是否过定点, 若过定点求出该点坐标, 若不过定点请说明理由; ② 证明:  $x_0$  为定值, 并求出该定值.

22. 已知函数  $f(x) = a \ln x - \frac{x+1}{x-1}$  ( $a \in \mathbf{R}$ ).

(1) 若函数  $f(x)$  有两个零点  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), 求  $a$  的取值范围;

(2) 证明  $\frac{1}{\ln x_1 + \frac{1}{a}} + \frac{1}{\ln x_2 + \frac{1}{a}} < 0$ .



## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。

