2021 年全国高中数学联赛江西省预赛试题

（5 月 30 日上午 9:30—12:00）

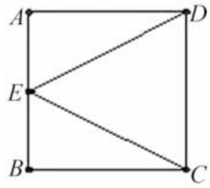
一、填空题（每小题 7 分，共 56 分）

1、使得 $3n+1$ 与 $5n+1$ 同时成为完全平方数的最小正整数 $n=$________.

2、方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2021}$ 的正整数解的组数为________.

3、$\triangle ABC$ 中，$AB=c$，$BC=a$，$AC=b$，且 $a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$，若 $\angle A=72°$，则 $\angle B=$________.

4、如图，边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中，E 是 AB 的中点，现将 $\triangle AED$，$\triangle BEC$ 沿 EC，ED 折起，使 EA，EB 重合，组成一个四面体，则此四面体的体积是________.



第 4 题图

5、$\frac{1}{\sin 10°}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10°}$ 的值是________.

6、设对每个实数 x，$f(x)$ 的值皆取 x^2，$6-x$，$2x+15$ 中的最小值，则 $f(x)$ 的最大值是________.

7、函数 $f(x)=\frac{x-x^3}{(1+x^2)^2}$ 的值域是________.

8、集合 M 是集合 $A=\{1,2,\cdots,100\}$ 的子集，且 M 中至少含有一个平方数或者立方数，则这种子集 M 的个数是________.

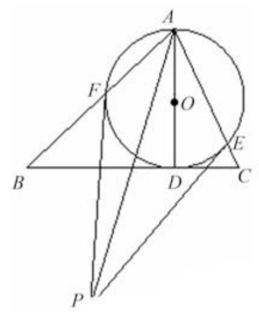
二、解答题（共 64 分）

9、（14 分）锐角 $\triangle ABC$ 中，若 $\cos^2 A$，$\cos^2 B$，$\cos^2 C$ 的和等于 $\sin^2 A$，$\sin^2 B$，$\sin^2 C$ 中的某个值，证明：$\tan A$，$\tan B$，$\tan C$ 必可按某顺序组成一个等差数列.

10、（15 分）正整数数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=a_2=a_3=1$，它的任何连续四个项 a_n，a_{n+1}，a_{n+2}，a_{n+3} 都满足：$a_na_{n+3}-a_{n+1}a_{n+2}=1$. 证明：对于它的任意三个连续项 a_n，a_{n+1}，a_{n+2} 而言，其首尾两项之和 a_n+a_{n+2} 必是中间一项 a_{n+1} 的倍数.

11、（15 分）给定圆 $P: x^2+y^2=2x$ 及抛物线 $S: y^2=4x$，过圆心 P 作直线 l，此直线与上述两曲线的四个交点，自上而下顺次记为 A，B，C，D，如果线段 AB，BC，CD 的长按此顺序构成一个等差数列，求直线 l 的方程.

12、（20 分）如图，锐角 $\triangle ABC$ 中，以高 AD 为直径的圆 O，交 AC，AB 于 E，F，过点 E，F 分别作圆 O 的切线，若两切线相交于点 P. 证明：直线 AP 重合于 $\triangle ABC$ 的一条中线.



2021 年全国高中数学联赛江西省预赛试题解答

（5 月 30 日上午 9:30—12:00）

一、填空题(每小题 7 分,共 56 分)

1、使得 $3n+1$ 与 $5n+1$ 同时成为完全平方数的最小正整数 $n=$ ________.

答案:16.

解:首先,当 $n=16$ 时,$3n+1=49=7^2$,$5n+1=81=9^2$,其次,对于集合 $M=\{1,2,\cdots,15\}$中的任一元素 a,$3a+1$ 与 $5a+1$ 中至少有一个不是平方数.

2、方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2021}$ 的正整数解的组数为________.

答案:9.

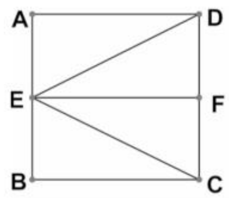
解:由 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2021}$,得到 $(x-2021)(y-2021)=2021^2=43^2\cdot 47^2$,因 $43^2\cdot 47^2$ 共有 $(2+1)(2+1)=9$ 个正因数,$x-2021$ 可取 9 个值,即 x 可取 9 个值,而当 x 取定后,y 的值便唯一确定;因此方程有 9 组正整数解.

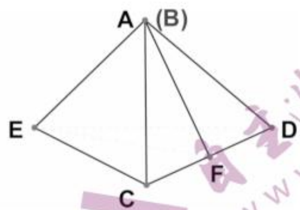
3、$\triangle ABC$ 中,$AB=c$,$BC=a$,$AC=b$,且 $a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$,若 $\angle A=72°$,则 $\angle B=$ ________.

答案:63°.

解:$\cos^2 C=\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2=\frac{a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2c^2(a^2+b^2)}{4a^2b^2}=\frac{2a^2b^2}{4a^2b^2}=\frac{1}{2}$,$\cos C=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,但 $C<180°-A=108°$,$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$C=45°$,因此 $B=180°-A-C=63°$.

4、边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中,E 是 AB 的中点,现将 $\triangle AED$,$\triangle BEC$ 沿 EC,ED 折起,使 EA,EB 重合,组成一个四面体,则此四面体的体积是________.





答案:$\frac{1}{\sqrt{3}}$.

解:设 CD 的中点为 F,$\triangle ACD$ 为正三角形,其边长为 2,因 $AF\perp CD$,$EF\perp CD$,于是 CD 垂直于面 AEF,$AF=\sqrt{3}$,$AE=1$,$EF=2$,则 $AE^2+AF^2=EF^2$. 所以 $AE\perp AF$,$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AE\cdot AF=\frac{\sqrt{3}}{2}$,从而 $V=\frac{1}{3}CD\cdot S_{\triangle AEF}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

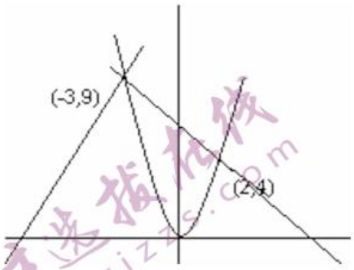
5、$\frac{1}{\sin 10°}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10°}$ 的值是________.

答案:4.

解:$\frac{1}{\sin 10°}-\frac{\sqrt{3}}{\cos 10°}=\frac{\cos 10°-\sqrt{3}\sin 10°}{\sin 10°\cdot\cos 10°}=4\cdot\frac{\frac{1}{2}\cos 10°-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°}{2\sin 10°\cos 10°}=4\cdot\frac{\sin 20°}{\sin 20°}=4.$

6、设对每个实数 x ,$f(x)$的值皆取 x^2,$6-x$,$2x+15$ 中的最小值,则 $f(x)$的最大值是

答案:9.



解:如图,解出其交点,则有 $f(x)=\begin{cases}2x+15, x\leqslant -3,\\ x^2, -3\leqslant x\leqslant 2,\\ 6-x, x\geqslant 2,\end{cases}$ 则当 $x\leqslant -3$, $f(x)\leqslant 9$;当 $-3\leqslant x\leqslant 2$, $f(x)\leqslant 9$;当 $x\geqslant 2$, $f(x)\leqslant 4$,因此 $f(x)\leqslant 9$, $x\in\mathbf{R}$.

7、函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{(1+x^2)^2}$ 的值域是________.

答案:$[-\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}]$.

解:$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}\cdot\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,令 $x=\tan\alpha$,则 $f=\dfrac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=\dfrac{1}{4}\sin 4\alpha$,由此,$-\dfrac{1}{4}\leqslant f\leqslant\dfrac{1}{4}$,当 $x=-\tan\dfrac{\pi}{8}$, $\tan\dfrac{\pi}{8}$ 时两边分别取得等号.

8、集合 M 是集合 $A=\{1,2,\cdots,100\}$ 的子集,且 M 中至少含有一个平方数或者立方数,则这种子集 M 的个数是________.

答案:$2^{88}(2^{12}-1)$.

解:集合 $A=\{1,2,\cdots,100\}$ 中的平方或者立方数构成集合 $B=\{1,4,8,9,16,25,27,36,49,64,81,100\}$,其中有 12 个元素,从 A 中挖去集合 B 后剩下的元素构成集合 C,则 C 中有 88 个元素,由于 C 的子集有 2^{88} 个,B 的非空子集有 $2^{12}-1$ 个,集 M 可表示为 $M=B_0\cup C_0$ 形式,其中 B_0 是 B 的任一非空子集,C_0 是 C 的任一子集,因此 M 的个数为 $2^{88}(2^{12}-1)$.

二、解答题(共 64 分)

9、(14 分)锐角△ABC 中,若 $\cos^2 A,\cos^2 B,\cos^2 C$ 的和等于 $\sin^2 A,\sin^2 B,\sin^2 C$ 中的某个值,证明:$\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ 必可按某顺序组成一个等差数列.

证明:不妨设 $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=\sin^2 B$ ①,据余弦定理:$\sin^2 B=\sin^2 A+\sin^2 C-2\sin A\sin C\cos B$ ②,而 $\sin A\sin C=\cos A\cos C-\cos(A+C)=\cos A\cos C+\cos B$ ③,由②③得,$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$ ④,由①④得,$2\cos A\cos B\cos C=1-\sin^2 B=\cos^2 B$,因 B 为锐角,则 $2\cos A\cos C=\cos B=-\cos(A+C)=\sin A\sin C-\cos A\cos C$,所以 $\tan A\tan C=3$. 于是 $\tan B=-\tan(A+C)=\dfrac{\tan A+\tan C}{\tan A\tan C-1}=\dfrac{\tan A+\tan c}{2}$;因此,$\tan A$, $\tan B$, $\tan C$ 成等差数列.

10、(15 分)正整数数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_1=a_2=a_3=1$,它的任何连续四个项 $a_n,a_{n+1},a_{n+2},a_{n+3}$ 都满足:$a_na_{n+3}-a_{n+1}a_{n+2}=1$. 证明:对于它的任意三个连续项 a_n,a_{n+1},a_{n+2} 而言,其首尾两项之和 a_n+a_{n+2} 必是中间一项 a_{n+1} 的倍数.

证:据条件易得,数列 $\{a_n\}$ 开初的一些项为:1,1,1,2,3,7,11,26,41,97,……,据此猜想:$a_{2n-1}+a_{2n+1}=2a_{2n}$ ①;$a_{2n}+a_{2n+2}=3a_{2n+1}$ ②.

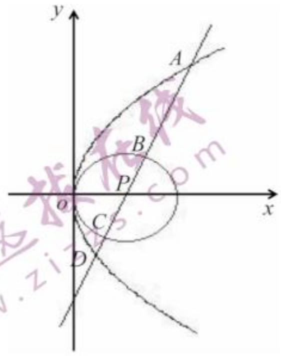
对 n 归纳,奠基是显然的,设①、②两式对于 n 成立,考虑 $n+1$ 的情形:

据所给条件式,对所有的正整数 k,都有 $a_{k+3}=\dfrac{a_{k+1}a_{k+2}+1}{a_k}$ ③,则 $a_{2n+3}=\dfrac{a_{2n+1}a_{2n+2}+1}{a_{2n}}=\dfrac{(2a_{2n}-a_{2n-1})a_{2n+2}+1}{a_{2n}}=2a_{2n+2}+\dfrac{-a_{2n+2}a_{2n-1}+(a_{2n+2}a_{2n-1}-a_{2n+1}a_{2n})}{a_{2n}}=2a_{2n+2}+\dfrac{-a_{2n+1}a_{2n}}{a_{2n}}=2a_{2n+2}-a_{2n+1}$,即 $a_{2n+1}+a_{2n+3}=2a_{2n+2}$.

而 $a_{2n+4}=\dfrac{a_{2n+2}a_{2n+3}+1}{a_{2n+1}}=\dfrac{(3a_{2n+1}-a_{2n})a_{2n+3}+(a_{2n}a_{2n+3}-a_{2n+1}a_{2n+2})}{a_{2n+1}}=3a_{2n+3}-a_{2n+2}$,即 $a_{2n+2}+$

$a_{2n+4}=3a_{2n+3}$. 从而,①、②两式对于 $n+1$ 也成立,命题得证.

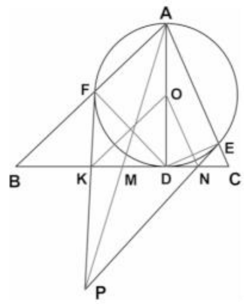
11、(15 分)给定圆 $P:x^2+y^2=2x$ 及抛物线 $S:y^2=4x$,过圆心 P 作直线 l,此直线与上述两曲线的四个交点,自上而下顺次记为 A,B,C,D,如果线段 AB,BC,CD 的长按此顺序构成一个等差数列,求直线 l 的方程.



解:圆 P 的方程为 $(x-1)^2+y^2=1$,则其直径长 $|BC|=2$,圆心为 $P(1,0)$,设 l 的方程为 $ky=x-1$,即 $x=ky+1$,代入抛物线方程得:$y^2=4ky+4$,设 $A(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$,有 $\begin{cases}y_1+y_2=4k,\\ y_1y_2=-4,\end{cases}$ 则 $(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2$,故

$|AD|^2=(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2=(y_1-y_2)^2+\left(\frac{y_1^2-y_2^2}{4}\right)^2=(y_1-y_2)^2\left[1+\left(\frac{y_1+y_2}{4}\right)^2\right]=16(k^2+1)^2$,因此 $|AD|=4(k^2+1)$ 据等差,$2|BC|=|AB|+|CD|=|AD|-|BC|$,所以 $|AD|=3|BC|=6$,即 $4(k^2+1)=6$,所以 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,则 l 的方程为 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}y+1$ 或 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}y+1$.

12、(20 分)锐角 $\triangle ABC$ 中,以高 AD 为直径的圆 O,交 AC,AB 于 E,F,过点 E,F 分别作圆 O 的切线,若两切线相交于点 P. 证明:直线 AP 重合于 $\triangle ABC$ 的一条中线.



证:设 M 为 BC 中点,过点 E,F 的切线 l_E,l_F 分别交 BC 于 N,K,设 $EN\cap AM=P,FK\cap AM=P'$,只要证点 P,P' 重合;$\triangle ABM,\triangle ACM$ 分别被直线 FK,EN 所截,据梅尼劳斯定理,$\frac{MK}{KB}\cdot\frac{BF}{FA}\cdot\frac{AP'}{P'M}=1,\frac{MN}{NC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AP}{PM}=1$,为证 $\frac{AP'}{P'M}=\frac{AP}{PM}$,只要证 $\frac{MK}{KB}\cdot\frac{BF}{FA}=\frac{MN}{NC}\cdot\frac{CE}{EA}$①.

设圆心为 O,连 DE,DF,ON,OK,因为 KD,KF 为⊙O 的切线,所以 OK 是 DF 的中垂线,又 $AF\perp DF$,则 $OK/\!/AB$,即 OK 是 $\triangle DAB$ 的中位线,K 是 BD 的中点,同理 N 是 CD 的中点,所以 $KN=\frac{1}{2}BC=MB=MC$,因此 $MK=CN=ND$,于是 $\frac{MK}{KB}=\frac{ND}{DK}=\frac{CD}{BD},\frac{MN}{NC}=\frac{DK}{ND}=\frac{BD}{CD}$②. 又在直角三角形 $\triangle ADB$,$\triangle ADC$ 中,由于 $DF\perp AB,DE\perp AC$,$\frac{BF}{FA}=\frac{BF}{DF}\cdot\frac{DF}{FA}=\left(\frac{BD}{AD}\right)^2,\frac{CE}{EA}=\frac{CE}{DE}\cdot\frac{DE}{EA}=\left(\frac{CD}{AD}\right)^2$③. 据②③可知,①式成立,因此结论得证.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》