

## 2022—2023 学年度（下）联合体高一期末检测

### 数学 参考答案及评分标准

一、单选题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1. B 【解析】 $\cos 1560^\circ = \cos(4 \times 360^\circ + 120^\circ) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ . 故选 B.

2. A 【解析】因为  $z = \frac{2-i}{2+i} = \frac{(2-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{3-4i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ , 所以  $\bar{z} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ . 故选 A.

3. A 【解析】矩形  $A'B'C'D'$  中得  $B'O' = \sqrt{A'O'^2 + A'B'^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{10}$ . 由斜二测画法，可知  $BO = 2B'O = 2\sqrt{10}$ ,  $AD = A'D' = 2A'O' = 2\sqrt{5}$ , 且  $OA \perp OB$ ,  $AD \parallel BC$ ,

$AB \parallel CD$ , 故四边形  $ABCD$  为平行四边形, 故  $S_{\text{四边形 } ABCD} = BO \cdot AD = 2\sqrt{10} \times 2\sqrt{5} = 20\sqrt{2}$ .

4. C 【解析】因为  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\frac{\pi}{6} < \alpha + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}$ , 则  $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)} =$

$\sqrt{1 - \left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5}$ , 所以  $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)} = -\frac{\sqrt{21}}{2}$ , 所以  $\tan\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right) =$

$\tan\left[\pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\right] = -\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{21}}{2}$ . 故选 C.

5. D 【解析】由正弦定理, 得  $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2$ , 所以  $AB = 2\sin C$ ,  $AC = 2\sin B$ ,

$AC \cdot \cos C + AB \cdot \cos B = 2\sin B \cos C + 2\sin C \cos B = 2\sin(B+C) = 2\sin A = \sqrt{3}$ . 故选 D.

6. C 【解析】因为  $|a+b| = \sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{a^2 + 2a \cdot b + b^2} = \sqrt{2^2 + 2 \times (-2) + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$ ,

$a \cdot (a+b) = a^2 + a \cdot b = 2^2 - 2 = 2$ , 所以  $\cos \theta = \frac{a \cdot (a+b)}{|a||a+b|} = \frac{2}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . 故选 C.

7. A 【解析】令  $k\pi - \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3} < k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , 解得  $2k\pi - \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{3}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ),

故  $f(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$  的单调递增区间为  $\left[2k\pi - \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{5\pi}{3}\right]$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). 取  $k=0$ , 则

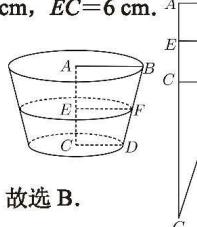
$f(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$  的单调递增区间为  $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ , 故 A 正确, B、C、D 错误. 故选 A.

8. B 【解析】如图所示, 画出圆台的立体图形和轴截面平面图形, 并延长  $EC$  与  $FD$  交于点  $G$ . 根据题意, 得  $AB=20$  cm,  $CD=10$  cm,  $AC=15$  cm,  $EC=6$  cm.

设  $CG=x$  cm,  $EF=y$  cm, 有  $\frac{CD}{AB} = \frac{CG}{AG}$ ,  $\frac{CD}{EF} = \frac{CG}{EG}$ ,

即  $\frac{10}{20} = \frac{x}{x+15}$ ,  $\frac{10}{y} = \frac{x}{x+6}$ , 解得  $x=15$ ,  $y=14$ , 所以

$V_{\text{水}} = \frac{1}{3} \left( \pi \times 14^2 + \pi \times 10^2 + \sqrt{\pi \times 14^2 \times \pi \times 10^2} \right) \times 6 = 872\pi$  (cm<sup>3</sup>). 故选 B.



**二、多选题**（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

9. AD 【解析】对于 A,  $i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$ , 故 A 正确;

对于 B,  $|2+i|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ , 故 B 错误; 对于 C,  $z=(1-2i)^2=-3-4i$ , 则 z 的虚部为 -4, 故 C 错误; 对于 D, 根据复数的模的几何意义, 可知 D 正确. 故选 AD.

10. BC 【解析】对于 A, 若  $m \perp l$ ,  $n \perp l$ , 则直线  $m$ ,  $n$  平行、相交或异面, 故 A 错误; 对于 B, 因为  $m \parallel n$ ,  $m \perp \alpha$ , 所以  $n \perp \alpha$ . 又因为  $n \parallel \beta$ , 所以  $\beta$  内存在一条直线  $l \parallel n$ , 所以  $l \perp \alpha$ . 由  $l \subset \beta$ , 从而得到  $\alpha \perp \beta$ , 故 B 正确;

对于 C, 如果一条直线上的两点在一个平面内, 那么这条直线也在此平面内. 因为  $A \in l$ ,  $B \in l$ , 且  $A \in \alpha$ ,  $B \in \alpha$ , 则  $l \subset \alpha$ , 故 C 正确;

对于 D, 由  $m \perp n$ , 不能得出线面垂直, 所以无法得出  $\alpha \perp \beta$ , 故 D 错误. 故选 BC.

11. ABC 【解析】对于 A, 在  $\triangle ABC$  中, 由  $A > B$  可得  $a > b$ , 根据正弦定理, 可得  $\sin A > \sin B$ , 故 A 正确;

对于 B, 由  $b = a \cos C + c \sin A$ , 根据正弦定理, 可得  $\sin B = \sin A \cos C + \sin C \sin A$ . 又  $\sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C$ , 所以  $\sin C \sin A = \cos A \sin C$ , 由在三角形中  $\sin C > 0$ , 所以  $\tan A = 1$ , 所以  $A = 45^\circ$ , 故 B 正确;

对于 C,  $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}, \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$  分别为向量  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  方向上的单位向量. 根据平行四边形法则,

向量  $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$  平分  $\angle BAC$ . 又  $\left( \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ , 则  $\left( \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \right) \perp \overrightarrow{BC}$ ,

所以  $AB = AC$ , 所以  $B = C$ , 故 C 正确;

对于 D, 若  $2 < b < 4$ , 即  $a \sin B < b < a$ , 此时符合条件的  $\triangle ABC$  有两个, 故 D 错误.  
故选 ABC.

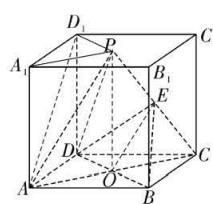
12. ABC 【解析】对于 A, 设  $AC$  与  $BD$  交于点  $O$ . 连接  $PO$ , 则  $PO \perp$  平面  $ABCD$ , 所以  $PO \perp BD$ . 又  $AC \perp BD$ ,  $PO \cap AC = O$ , 所以  $BD \perp$  平面  $PAC$ , 故 A 正确;

对于 B, 连接  $OE$ , 则  $OE \parallel PA$ . 又  $D_1P \parallel BD$ ,  $OE, BD \subset$  平面  $BDE$ ,  $PA, D_1P \subset$  平面  $PAD_1$ , 所以平面  $PAD_1 \parallel$  平面  $BDE$ , 故 B 正确;

对于 C,  $V_{D-BCE} = V_{E-BCD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ , 故 C 正确;

对于 D, 因为  $CD \parallel AB$ , 所以异面直线  $PC$  与  $AB$  所成的角为  $\angle DCP$  或其补角, 连接  $PD$ , 则  $CD = 1$ ,  $PC = PD = \frac{\sqrt{6}}{2}$ . 在  $\triangle PCD$  中,

$$\cos \angle DCP = \frac{1 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}{2 \times 1 \times \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \neq \frac{\sqrt{2}}{2},$$



所以异面直线  $PC$  与  $AB$  所成的角不等于  $45^\circ$ , 故 D 错误. 故选 ABC.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13.  $\frac{9}{16}$  【解析】由  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{4}$ ，得  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + \sin 2\alpha = \frac{25}{16}$ ，所以  $\sin 2\alpha = \frac{9}{16}$ .

14. 0 【解析】因为复数  $z_1 = 3+i$ ,  $z_2 = -1+3i$  ( $i$  为虚数单位) 在复平面上对应的点

分别为  $Z_1$ ,  $Z_2$ , 所以  $Z_1(3, 1)$ ,  $Z_2(-1, 3)$ , 所以  $\overrightarrow{OZ_1} = (3, 1)$ ,  $\overrightarrow{OZ_2} = (-1, 3)$ , 则

$$\overrightarrow{OZ_1} \cdot \overrightarrow{OZ_2} = 3 \times (-1) + 1 \times 3 = 0.$$

15.  $80\sqrt{5}$  【解析】因为  $\angle ADB = 135^\circ$ ,  $\angle BDC = \angle DCA = 15^\circ$ , 所以  $\angle ADC = 150^\circ$ ,

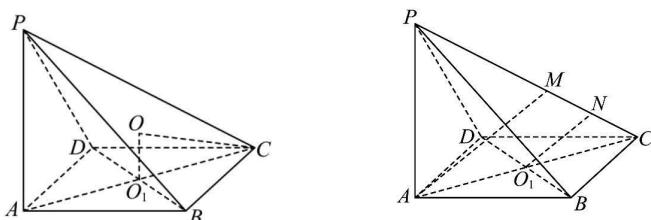
$\angle DAC = \angle DCA = 15^\circ$ , 所以  $AD = CD = 80$ . 又因为  $\angle ACB = 120^\circ$ , 所以  $\angle BCD = 135^\circ$ ,

$\angle CBD = 30^\circ$ . 在  $\triangle BCD$  中, 由正弦定理得  $\frac{BD}{\sin \angle BCD} = \frac{CD}{\sin \angle CBD}$ , 即  $\frac{BD}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{80}{\frac{1}{2}}$ , 解得

$BD = 80\sqrt{2}$ . 在  $\triangle ABD$  中, 由余弦定理得  $AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos \angle ADB$ , 所以

$$AB^2 = 80^2 + (80\sqrt{2})^2 - 2 \times 80 \times 80\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \text{解得 } AB = 80\sqrt{5}.$$

16. 2 【解析】因为  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AC \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $PA \perp AC$ . 连接  $AM$ . 由题意可知三棱锥  $M-BCD$  的外接球即四棱锥  $M-ABCD$  的外接球, 则当三棱锥  $M-BCD$  外接球的体积最小时, 四棱锥  $M-ABCD$  外接球的半径最小. 设四棱锥  $M-ABCD$  外接球的球心为  $O$ , 半径为  $R$ , 连接  $AC$  与  $BD$  交于点  $O_1$ , 当点  $O$  与点  $O_1$  不重合时, 连接  $OO_1$ . 易知  $OO_1 \perp$  平面  $ABCD$ , 则  $OO_1 \perp O_1C$ . 连接  $OC$ , 在  $\text{Rt}\triangle OO_1C$  中,  $R = OC > O_1C$ .



当点  $O$  与点  $O_1$  重合时,  $R = OC = O_1C$ , 所以当三棱锥  $M-BCD$  的外接球的体积最小时,

点  $O$  与点  $O_1$  重合,  $R = O_1C$ . 设  $CM$  的中点为  $N$ , 连接  $O_1N$ , 易知  $O_1N \perp CM$ , 则

$$\cos \angle O_1CN = \frac{CN}{CO_1} = \frac{AC}{PC}, \text{ 所以 } \frac{CN}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}, \text{ 解得 } CN = 1, \text{ 所以 } CM = 2CN = 2.$$

**四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分）**

规范解答	评分细则
<p>17. 解：(1) 由于 <math>z = (m^2 - m - 20) + (m^2 + 2m - 35)i</math>，且复数 <math>z</math> 为纯虚数，所以 <math>\begin{cases} m^2 - m - 20 = 0, \\ m^2 + 2m - 35 \neq 0, \end{cases}</math> 4 分  解得 <math>m = -4</math>. ..... 5 分  (2) 当 <math>m=3</math> 时，<math>z = -14 - 20i</math>, ..... 6 分  所以 <math>iz + \bar{z} = i(-14 - 20i) - 14 + 20i</math> ..... 7 分  <math>= -14i - 20i^2 - 14 + 20i</math> ..... 9 分  <math>= 6 + 6i</math>. ..... 10 分</p> <p>18. (1) 证明：(方法一) 由题知 <math>A(-1, 0)</math>, <math>B(1, 0)</math>, <math>C(\cos\alpha, \sin\alpha)</math>，则 <math>\overrightarrow{AC} = (\cos\alpha + 1, \sin\alpha)</math>, <math>\overrightarrow{BC} = (\cos\alpha - 1, \sin\alpha)</math>, ..... 3 分  所以 <math>\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \cos^2\alpha - 1 + \sin^2\alpha = 1 - 1 = 0</math>, ..... 5 分  故 <math>\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}</math>, 即 <math>AC \perp BC</math>. ..... 6 分  (方法二) 由题意知 <math>A(-1, 0)</math>, <math>B(1, 0)</math>, <math> OB  = 1</math>. 设 <math>C(a, b)</math>，则 <math>\overrightarrow{AC} = (a + 1, b)</math>, <math>\overrightarrow{BC} = (a - 1, b)</math>, <math> OB  =  OC  = \sqrt{a^2 + b^2} = 1</math>，得 <math>a^2 + b^2 = 1</math>, ..... 3 分  所以 <math>\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2 - 1 + b^2 = 1 - 1 = 0</math>, ..... 5 分  故 <math>\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}</math>, 即 <math>AC \perp BC</math>. ..... 6 分  (2) 解：由题意得 <math>\angle COB = \frac{\pi}{3}</math>，则 <math>C\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)</math>. ..... 7 分  设 <math>\angle QOB = \beta</math>，则 <math>\beta \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)</math>, <math>Q(\cos\beta, \sin\beta)</math>.  <math>\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)</math>, <math>\overrightarrow{QA} = (-1 - \cos\beta, -\sin\beta)</math>,  所以 <math>\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\beta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta = \sin\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}</math>. ..... 10 分  由 <math>\beta \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)</math>，得 <math>\beta - \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)</math>, ..... 11 分  当 <math>\beta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}</math>，即 <math>\beta = \frac{2\pi}{3}</math> 时，<math>(\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{CB})_{\max} = \frac{1}{2}</math>.  故 <math>\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{CB}</math> 的最大值为 <math>\frac{1}{2}</math>. ..... 12 分</p>	根据步骤给分. 列对一个式子 2 分

<p><b>19.</b> (1) 证明: 因为 <math>M, N</math> 分别是棱 <math>SB, SC</math> 的中点, 所以 <math>MN \parallel BC</math>. ..... 2 分 在正六边形 <math>ABCDEF</math> 中, 易得 <math>BC \parallel AD</math>, 所以 <math>MN \parallel AD</math>. ..... 4 分 因为 <math>AD \subset \text{平面 } SAD</math>, <math>MN \not\subset \text{平面 } SAD</math>, ..... 5 分 所以 <math>MN \parallel \text{平面 } SAD</math>. ..... 6 分</p> <p>(2) 解: 由题意知球心 <math>Q</math> 一定在直线 <math>SO</math> 上. 设球 <math>Q</math> 的半径为 <math>R</math>, 则 <math>R=QS=QB</math>.</p> <p>又 <math>QB^2 = OQ^2 + OB^2</math>,</p> <p>所以 <math>R^2 = (8-R)^2 + 4^2</math>, 解得 <math>R=5</math>, ..... 8 分</p> <p>所以球 <math>Q</math> 的表面积为 <math>4\pi R^2 = 100\pi</math>, ..... 10 分</p> <p>体积为 <math>\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{500}{3}\pi</math>. ..... 12 分</p> <p><b>20.</b> 解: (1) 因为 <math>2b\sin A = a\tan B = \frac{a\sin B}{\cos B}</math>, ..... 2 分 由正弦定理, 可得 <math>2\sin B\sin A = \sin A \cdot \frac{\sin B}{\cos B}</math>. ..... 4 分 因为 <math>\sin A \neq 0</math>, <math>\sin B \neq 0</math>, 所以 <math>\cos B = \frac{1}{2}</math>. 又因为 <math>B \in (0, \pi)</math>, 所以 <math>B = \frac{\pi}{3}</math>. ..... 6 分</p> <p>(2) 由余弦定理, <math>b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = (a+c)^2 - 3ac = 16 - 3ac</math>, 即 <math>3ac = 16 - b^2</math>, ..... 7 分</p> <p>所以 <math>16 - b^2 \leq 3\left(\frac{a+c}{2}\right)^2</math>, 解得 <math>b \geq 2</math>, ..... 9 分</p> <p>当且仅当 <math>a=c=2</math> 时取等号, <math>b_{\min} = 2</math>, ..... 10 分 所以 <math>\triangle ABC</math> 周长的最小值为 6, ..... 10 分 此时 <math>S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B = \sqrt{3}</math>. ..... 12 分</p> <p><b>21.</b> 解: (1) <math>f(x) = 2a \cdot b</math></p> $= 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x ..... 1 \text{ 分}$ $= \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + 1$ $= 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1, ..... 3 \text{ 分}$ <p>所以函数 <math>f(x)</math> 的最小正周期为 <math>T = \frac{2\pi}{2} = \pi</math>. ..... 4 分</p>	<p>不写 “<math>AD \subset \text{平面 } SAD</math>, <math>BC \not\subset \text{平面 } SAD</math>” 扣 2 分</p> <p>公式正确, 计算错误得 1 分</p> <p>不写等号成立的条件扣 1 分 写对面积公式得 1 分</p>
--	---

因为  $x \in \mathbb{R}$ , 所以  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in [-1, 1]$ ,  
 所以  $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 \in [-1, 3]$ ,  
 所以函数  $f(x)$  的值域为  $[-1, 3]$ . ..... 5 分

(2) 若对于任意  $x_1 \in \mathbb{R}$ , 总存在  $x_2 \in \mathbb{R}$ , 使得  $g(x_1) = f(x_2)$  恒成立,  
 则  $\{y | y = g(x)\} \subseteq \{y | y = f(x)\}$ .

$$g(x) = \max \left\{ \sqrt{3}a \sin x, a \cos x \right\}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{3}a \sin x, & \sqrt{3}a \sin x \geq a \cos x, \\ a \cos x, & \sqrt{3}a \sin x < a \cos x. \end{cases} \quad \text{..... 6 分}$$

当  $\sqrt{3}a \sin x \geq a \cos x$  时,

则  $\sqrt{3}a \sin x - a \cos x \geq 0$ , 即  $2a \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$ .

因为  $a > 0$ , 则  $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$ ,

即  $2k\pi \leq x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$ ,

解得  $x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$ ,

则  $g(x) = \sqrt{3}a \sin x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \sqrt{3}a\right]$ . ..... 8 分

同理当  $\sqrt{3}a \sin x < a \cos x$  时,

则  $x \in \left(-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ ,

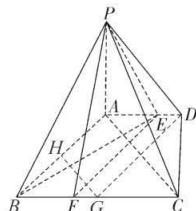
$$g(x) = a \cos x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a, a\right], \quad \text{..... 10 分}$$

故  $g(x) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}a, \sqrt{3}a\right]$ ,

所以  $\begin{cases} a > 0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a \geq -1, \\ \sqrt{3}a \leq 3, \end{cases} \quad \text{..... 11 分}$

解得  $a \in \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ , 所以实数  $a$  的取值范围是  $\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ . ..... 12 分

22. (1) 证明: 由  $AB \perp AC$ ,  $AB=AC=\sqrt{2}$ ,  
 知  $\triangle ABC$  为等腰直角三角形, 则  $BC=2$ .  
 又四边形  $ABCD$  是直角梯形, 且  $\angle ADC=90^\circ$ , 且  $AD \parallel BC$ ,  
 所以  $\angle CAD=\angle ACB=\frac{\pi}{4}$ . ..... 1 分  
 因为  $\angle ADC=90^\circ$ , 故  $\triangle ACD$  为等腰直角三角形,  
 所以  $AD=DC=AC \cos \frac{\pi}{4}=1$ .  
 因为  $BC=2$ ,  $AE=2ED$ ,  $CF=2FB$ ,  
 所以  $AE=\frac{2}{3}AD=\frac{2}{3}$ ,  $BF=\frac{1}{3}BC=\frac{2}{3}$ . ..... 3 分  
 又  $AD \parallel BC$ , 即  $AE \parallel BF$ ,  
 所以四边形  $AEBF$  为平行四边形, 则  $EF \parallel AB$ .  
 又因为  $AB \perp AC$ , 故  $EF \perp AC$ . ..... 4 分  
 由  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $EF \subset$  底面  $ABCD$ , 则  $PA \perp EF$ .  
 又因为  $PA \cap AC=A$ ,  $PA$ ,  $AC \subset$  平面  $PAC$ , 所以  $EF \perp$  平面  $PAC$ .  
 又因为  $EF \subset$  平面  $PEF$ ,  
 所以平面  $PEF \perp$  平面  $PAC$ . ..... 7 分  
 (2) 解: 取  $BC$  的中点  $G$ , 连接  $DG$ ,



由(1)易知四边形  $ADGB$  为平行四边形, 所以  $BA \parallel GD$ .  
 而  $BA \subset$  平面  $PAB$ ,  $GD \not\subset$  平面  $PAB$ ,  
 所以  $GD \parallel$  平面  $PAB$ ,  
 所以点  $D$  到平面  $PAB$  的距离即为点  $G$  到平面  $PAB$  的距离. ..... 8 分  
 由  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $AC \subset$  底面  $ABCD$ , 所以  $PA \perp AC$ .  
 又  $AB \perp AC$ ,  $AB \cap PA=A$ ,  $AB$ ,  $PA \subset$  平面  $PAB$ ,  
 故  $AC \perp$  平面  $PAB$ . ..... 10 分  
 取  $AB$  的中点  $H$ , 连接  $GH$ ,  
 则  $GH \parallel AC$ , 故  $GH \perp$  平面  $PAB$ . 又  $\angle ABC=\frac{\pi}{4}$ ,  
 所以点  $G$  到平面  $PAB$  的距离  $GH=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$ , ..... 11 分  
 即点  $D$  到平面  $PAB$  的距离为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . ..... 12 分

不写  $PA \cap AC=A$ ,  $PA$ ,  
 $AC \subset$  平面  $PAC$  扣 2 分

不写  $BA \subset$  平面  $PAB$ ,  
 $GD \not\subset$  平面  $PAB$  扣 2 分

不写  $AB \perp AC$ ,  $AB \cap PA$   
 $=A$ ,  $AB$ ,  $PA \subset$  平面  
 $PAB$  扣 2 分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：**[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线

