（1）求C的标准方程；

（2）直线l与C交于A，B两点，点P在线段AB上，点Q在线段AB的延长线上，从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立：

①$P(8,1)$；②$|AP|\cdot|BQ|=|BP|\cdot|AQ|$；③$Q$是直线$l$与直线$x-y-1=0$的交点.

注：如果选择不同的组合分别解答，按第一个解答计分.

22.（12分）已知函数$f(x)=xe^{x}$，$g(x)=x+x\ln x$.

（1）证明：$f(x)>g(x)$；

（2）若$|f(x)-a|>ag(x)$恒成立，求实数a的取值范围.

数学（二）

一、选择题

1.B 【解析】$z=\dfrac{7+5i}{1+i}=\dfrac{(7+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{12-2i}{2}=6-i$，故$\bar{z}=6+i$.故选B项

2.C 【解析】由题意得$U=\{x|-1\leqslant x\leqslant 8\}$，所以$(\complement_U A)\cap B=\{-1,3,4\}$.故选C项.

3.C 【解析】对于A项，$f(x)=-\cos x$，所以$f(-x)=-\cos(-x)=-\cos x=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数；对于B项，$f(-x)=2^{-x}+2^{x}=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数；对于C项，$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f(-x)=\dfrac{-x}{2^{-x}-1}-x=-x\left(\dfrac{2^{x}}{1-2^{x}}+1\right)=\dfrac{x}{2^{x}-1}\neq f(x)$，所以$f(x)=\dfrac{x}{2^{x}-1}+x$不是偶函数；对于D项，$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(-x)=-x\ln\left(\sqrt{x^{2}+1}+x\right)=x\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^{2}+1}+x}\right)=x\ln\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)=f(x)$，所以$f(x)=x\ln\left(\sqrt{x^{2}+1}-x\right)$是偶函数.故选C项.

4.D 【解析】由题得：$p:\forall x>0$，$x+\dfrac{4}{x}\geqslant a$为真命题，又$x+\dfrac{4}{x}\geqslant 4$，当且仅当$x=2$时等号成立，反之也成立.所以$a\leqslant 4$是$p$为真命题的充要条件，$a\geqslant 4$是$p$为真命题的既不充分也不必要条件，$a\geqslant 2$是$p$为真命题的既不充分也不必要条件，$a\leqslant 2$是$p$为真命题的充分不必要条件.故选D项.

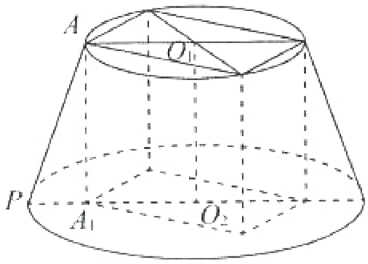
5.B 【解析】分组方法共有$(2,2,5)$，$(2,3,4)$，$(3,3,3)$三种情况，所以分配方法共有

$A_3^3\left(\dfrac{C_9^2C_7^2C_5^5}{A_2^2}+C_9^2C_7^3C_4^4+\dfrac{C_9^3C_6^3C_3^3}{A_3^3}\right)=11508$.故选 B 项.

6.A 【解析】由题意碾滚最外侧滚过的距离为 $2\pi\times100\text{cm}=200\pi\text{cm}$，碾滚的周长为 $2\pi\times30\text{cm}=60\pi\text{cm}$，所以碾滚滚过 $\dfrac{200\pi}{60\pi}=\dfrac{10}{3}$ 圈，即滚过了 $\dfrac{10}{3}\times360°=3\times360°+120°$，所以点 A 距碾盘的垂直距离为 $30-30\times\cos(180°-120°)=15\text{cm}$.故选 A 项.

7.A 【解析】由圆台上底面与下底面的面积比为 1:4，得圆台上底面与下底面的半径比为 $\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{1}{2}$，由题知正方体的棱长为 $\sqrt{2}r_1$，如图，在 $\text{Rt}\triangle AA_1P$ 中，$AP=\sqrt{6}$，$A_1P=r_1$，$A_1A=\sqrt{2}r_1$，即 $\left(\sqrt{6}\right)^2=r_1^2+\left(\sqrt{2}r_1\right)^2$，解得 $r_1=\sqrt{2}$，则 $V_1=\dfrac{1}{3}\pi\times2\times(2+8+4)=\dfrac{28\pi}{3}$，正方体的外接球半径为 $R=\dfrac{\sqrt{3\times2^2}}{2}=\sqrt{3}$，

$V_2=\dfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^2=4\sqrt{3}\pi$，所以 $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\frac{28\pi}{3}}{4\sqrt{3}\pi}=\dfrac{7\sqrt{3}}{9}$.故选 A 项.



8.B 【解析】解法一：设 $f(x)=(100-x)\lg(100+x)$，$x\in[-1,1]$，当 $x\in[-1,1]$ 时，$f'(x)=-\lg(100+x)+\dfrac{100-x}{100+x}\lg e$，令 $g(x)=-\lg(100+x)+\dfrac{100-x}{100+x}\cdot\lg e$，则 $g'(x)=-\dfrac{1}{100+x}\lg e-\dfrac{200}{(100+x)^2}\lg e<0$，所以函数 $g(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减，所以 $g(-1)=-\lg99+\dfrac{101}{99}\lg e=\lg e^{\frac{101}{99}}-\lg99$，又 $e^{\frac{101}{99}}<e^2<99$，所以 $g(x)<g(-1)<0$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上单调递减，所以 $f(-1)=101\lg99>f(0)=100\lg100=200>f(1)=99\lg101=\lg(101)^{99}$，故 $c>a>b$.故选 B 项.

解法二：由题意得 $a=\lg10^{200}=\lg100^{100}=100\lg100$，$b=99\lg101$.令函数 $f(x)=(200-x)\ln x$，$f'(x)=\dfrac{200-x}{x}-\ln x=\dfrac{200}{x}-1-\ln x$，当 $x\in(90,+\infty)$ 时，$f'(x)<\dfrac{200}{90}-1-\ln90<0$，所以 $f(x)$ 在区

间 $(90,+\infty)$ 内单调递减，所以 $f(99)>f(100)>f(101)$，所以 $101\ln 99>100\ln 100>99\ln 101$，即 $99^{101}>100^{100}>101^{99}$，所以 $c>a>b$.故选 B 项.

二、选择题

9.BD 【解析】由题意得 $\alpha-\frac{\pi}{8}$ 也是第一象限角，所以 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\sin\left(\frac{5\pi}{8}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{3}$，A 项错误；$\cos\left(\alpha+\frac{7\pi}{8}\right)=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{8}+\pi\right)=-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{1}{3}$，B 项正确；$\sin\left(\frac{13\pi}{8}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{1}{3}$，C 项错误；

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=-\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)}=-2\sqrt{2}$$，D 项正确.故选 BD 项.

10.AC 【解析】由题意得 $f'(x)=3x^2+2bx+c$，又 $f'(-1)=3-2b+c=0$，又 $f(-1)=-1+b-c+b^2=8$，解得 $\begin{cases}b=3\\c=3\end{cases}$（舍去）或 $\begin{cases}b=-2\\c=-7\end{cases}$，故 B 项错误；$f(x)=x^3-2x^2-7x+4$，$f'(x)=3x^2-4x-7=(x+1)(3x-7)$，当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in\left(-1,\frac{7}{3}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in\left(\frac{7}{3},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，又 $f(-3)<0$，$f(-1)>0$，$f(1)<0$，$f(4)>0$，所以 $f(x)$ 有三个零点，故 A 项正确；又 $f'(2)=-3$，$f(2)=-10$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y+10=-3(x-2)$，即 $3x+y+4=0$，故 C 项正确；$f(-x)-2=-x^3-2x^2+7x+2\neq -f(x)+2$，故 D 项错误.故选 AC 项.

11.BCD 【解析】联立 $\begin{cases}x^2=4y\\(x-2)^2+y^2=1\end{cases}$，得 $(x-2)^2+\frac{x^4}{16}=1$，因为 $x=2$ 是方程的一个根，所以 C 与 E 有公共点，A 项错误；连接 EA，EB，则 $EA\perp FA$，$EB\perp FB$，所以 F，A，B，E 四点在以 FE 为直径

的圆上，圆的方程为$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$，化简得$x^2+y^2-2x-y=0$，B项正确；由题得$|FA|=\sqrt{|EF|^2-|EA|^2}=2$，所以$\frac{|AB|}{2}=\frac{|EA|\times|FA|}{|EF|}=\frac{1\times 2}{\sqrt{5}}$，所以$|AB|=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，C项正确；设过点$F$且与圆$E:(x-2)^2+y^2=1$相切的切线方程为$y=kx+1$，由$\frac{|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得$k=0$或$k=-\frac{4}{3}$.不妨设$l_1:y=1$，$l_2:y=-\frac{4}{3}x+1$，则$|MN|=4$，联立$\begin{cases}x^2=4y\\ y=-\frac{4}{3}x+1\end{cases}$得$9y^2-82y+9=0$，所以$y_P+y_Q=\frac{82}{9}$，所以$|PQ|=y_P+y_Q+2=\frac{100}{9}$，所以$|MN|+|PQ|=4+\frac{100}{9}=\frac{136}{9}$，D项正确.故选BCD项.

12.ACD　【解析】当$n\geqslant 2$时，$S(n)-S(n-1)=\omega(9n-8)+\omega(9n-7)+\omega(9n-6)+\omega(9n-5)+\omega(9n-4)+\omega(9n-3)+\omega(9n-2)+\omega(9n-1)+\omega(9n)$，又$9n-8=1\cdot 9^0+(n-1)\cdot 9^1$，所以$\omega(9n-8)=1+n-1=n$，同理$9n-7=2\cdot 9^0+(n-1)\cdot 9^1$，所以$\omega(9n-7)=2+n-1=n+1$，…，$9n-1=8\cdot 9^0+(n-1)\cdot 9^1$，所以$\omega(9n-1)=8+n-1=n+7$，$9n=0\cdot 9^0+n\cdot 9$，所以$\omega(9n)=n$，所以$S(n)-S(n-1)=9n+28$，A项正确；$9n+10=0\cdot 9^0+a_0\cdot 9^1+a_1\cdot 9^2+\cdots+a_{k-1}\cdot 9^k+a_k\cdot 9^{k+1}+9+1$，$\omega(9n+10)=1+1+a_0+a_1+a_2+\cdots+a_k=\omega(n)+2$，B项错误；当$n=1$时，$S(1)=\omega(1)+\omega(2)+\cdots+\omega(9)=1+2+\cdots+8+1=37$，当$n\geqslant 2$时，$S(n)=S(n)-S(n-1)+S(n-1)-S(n-2)+\cdots+S(2)-S(1)+S(1)=9n+28+9(n-1)+28+\cdots+9\times 2+28+9\times 1+28=\frac{n(9n+65)}{2}=\frac{9n^2+65n}{2}$，当$n=1$时也符合，所以$S(n)=\frac{9n^2+65n}{2}$，所以$\frac{S(n)}{n}=\frac{9n+65}{2}$，所以$\frac{S(n)}{n}-\frac{S(n-1)}{n-1}=\frac{9n+65}{2}-\frac{9n+56}{2}=\frac{9}{2}$，所以数列$\left\{\frac{S(n)}{n}\right\}$为等差数列，C项正确；$\frac{9^n-1}{8}=\frac{1\times(1-9^n)}{1-9}=9^0+9^1+9^2+9^3+\cdots+9^{n-1}$，$\omega\left(\frac{9^n-1}{8}\right)=1+1+\cdots+1=n$，D项正确.故选ACD项.

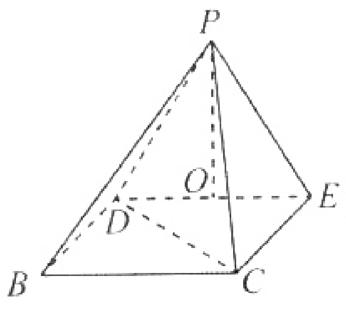
三、填空题

13.$3\sqrt{3}$【解析】由题意得$|\vec{a}|^2=3+1=4$，$|\vec{b}|^2=m^2+1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}m-1$，所以$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16-4\sqrt{3}m+4+m^2+1=12$，所以$m^2-4\sqrt{3}m+9=0$，解得$m=3\sqrt{3}$或

$m=\sqrt{3}$.当 $m=\sqrt{3}$ 时，$\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|$，不符合题意；当 $m=3\sqrt{3}$ 时，$\left|\vec{b}\right|>\left|\vec{a}\right|$.所以 $m=3\sqrt{3}$.

14.0.15 【解析】由题意知 $\mu=\frac{1}{2}$，所以 $P(X<-1)=P(X>2)=0.1$，所以 $P\left(-1\leqslant X\leqslant-\frac{1}{2}\right)=P\left(X<-\frac{1}{2}\right)-P(X<-1)=0.15$.

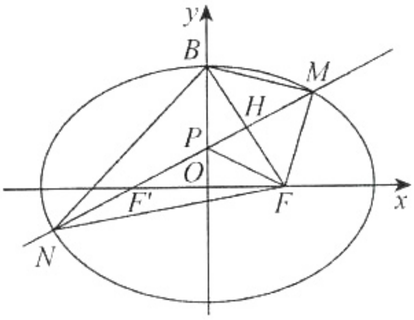
15.$\frac{\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3}$【解析】如图，过点 D 作 $DE\parallel BC$，且 $DE=BC$，连接 PE，CE，由题意可知 $PD\perp BD$，$BC\perp BD$，所以 $BD\perp$平面 PDE，所以 $BD\perp PE$，所以 $CE\perp PE$，所以 $PE=\sqrt{PC^2-CE^2}=2$.又 $BD\subset$平面 $BCED$，所以平面 $BCED\perp$平面 PDE.取 DE 的中点 O，连接 OP，则 $OP\perp$平面 $BCED$，且 $OP=\sqrt{3}$，所以三棱锥 $P-BCD$ 的体积 $V_{P-BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot OP=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 又 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times2\times2=2$，$S_{\triangle PBC}=S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-1^2}=\sqrt{7}$，$S_{\triangle PBD}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=2$，所以三棱锥 $P-BCD$ 的表面积 $S=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle PBD}+S_{\triangle PCD}+S_{\triangle PBC}=2\left(2+\sqrt{7}\right)$，设三棱锥 $P-BCD$ 的内切球半径为 r，则 $r=\frac{3V}{S}=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3}$.



16.$\frac{1}{2}$　$\sqrt{3}$【解析】由 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PO}$，可得 $\left|BP\right|=\frac{2}{3}b$，$\left|OP\right|=\frac{1}{3}b$，连接 PF，在 $\mathrm{Rt}\triangle POF$ 中，由勾股定理得 $\left|OP\right|^2+\left|OF\right|^2=\left|PF\right|^2$，所以 $\left(\frac{1}{3}b\right)^2+c^2=\left(\frac{2}{3}b\right)^2$，整理得 $b^2=3c^2$，所以 $a^2-c^2=3c^2$，即 $a^2=4c^2$，所以 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.在 $\mathrm{Rt}\triangle BOF$ 中，$\cos\angle BFO=\frac{\left|OF\right|}{\left|BF\right|}=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $\angle BFO=60^\circ$.设直线 MN 交 x 轴于点 F'，交 BF 于点 H，在 $\mathrm{Rt}\triangle HFF'$ 中，由 $\left|FF'\right|=\frac{\left|HF\right|}{\cos\angle BFO}=a=2c$，所以 F' 为 C 的左焦点，又

$|MB|=|MF|$，$|NB|=|NF|$，所以$\triangle BMN$的周长等于$\triangle FMN$的周长，又$\triangle FMN$的周长为$4a$，所以$4a=8$，

解得$a=2$，所以$c=1$，故$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$.



四、解答题

17.解：（1）由题得$2\sin A=3\tan\dfrac{\pi-A}{2}=\dfrac{3\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A}{2}\right)}=\dfrac{3\cos\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}$，

所以$4\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{3\cos\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}$，又$0<A<\pi$，所以$0<\dfrac{A}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，

所以$0<\cos\dfrac{A}{2}<1$，$0<\sin\dfrac{A}{2}<1$，所以$\sin^2=\dfrac{A}{2}=\dfrac{3}{4}$，

所以$\sin\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\dfrac{A}{2}=\dfrac{\pi}{3}$，故$A=\dfrac{2\pi}{3}$.

（2）由题得$\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}bc\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，所以$bc=4$，又$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}=\sqrt{6}$，

所以$b^2+c^2+2bc\cos\dfrac{2\pi}{3}=6$，故$b^2+c^2=6+bc=10$，

由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=10-2\times4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=14$，所以$a=\sqrt{14}$.

18.解：（1）零假设为H_0：用餐学生与两家餐厅满意度无关联，依题意列出2×2列联表如下：

	不满意	满意	合计
A餐厅	15	52	67
B餐厅	6	63	69
合计	21	115	136

$\chi^2=\dfrac{136\times(15\times63-52\times6)^2}{67\times69\times21\times115}\approx4.881<7.879=x_{0.005}$，

根据小概率值$\alpha=0.005$的独立性检验，没有充分证据推断H_0不成立，因此可以认为H_0成立，即认为用餐学生与两家餐厅满意度无关联.

（2）设事件$A_i=$“第i次在A餐厅用餐”，事件$B_i=$“第i次在B餐厅用餐”，其中$i=1,2,3$，

由题意A_i与B_i互斥，且$P\left(A_1\right)=P\left(B_1\right)=\dfrac{1}{2}$，$P\left(A_2|A_1\right)=\dfrac{1}{4}$，$P\left(B_2|A_1\right)=\dfrac{3}{4}$；$P\left(A_2|B_1\right)=\dfrac{1}{2}$，$P\left(B_2|B_1\right)=\dfrac{1}{2}$，

由全概率公式得$P\left(A_2\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_2|A_1\right)+P\left(B_1\right)P\left(A_2|B_1\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$，

$P\left(B_2\right)=1-P\left(A_2\right)=\dfrac{5}{8}$，又$P\left(B_3|A_2\right)=\dfrac{3}{4}$，$P\left(B_3|B_2\right)=\dfrac{1}{2}$，

由全概率公式得$P\left(B_3\right)=P\left(A_2\right)P\left(B_3|A_2\right)+P\left(B_2\right)P\left(B_3|B_2\right)=\dfrac{3}{8}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{8}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{19}{32}$.

19.（1）证明：由$3a_{n+1}=a_n+12$，得$a_{n+1}=\dfrac{a_n+12}{3}$，即$a_{n+1}-6=\dfrac{a_n+12}{3}-6=\dfrac{a_n-6}{3}=\dfrac{1}{3}\left(a_n-6\right)$，

又$a_1-6=3$，所以$a_n-6\neq 0$，所以数列$\left\{a_n-6\right\}$是以 3 为首项，$\dfrac{1}{3}$为公比的等比数列.

（2）解：由（1）可知，$a_n-6=3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{3^{n-2}}$，

所以$a_n=\dfrac{1}{3^{n-2}}+6$，故$na_n=\dfrac{n}{3^{n-2}}+6n$，

设数列$\left\{6n\right\}$的前n项和为P_n，数列$\left\{\dfrac{n}{3^{n-2}}\right\}$的前$n$项和为$T_n$.

所以数列$\left\{na_n\right\}$的前n项和$S_n=T_n+P_n$，

所以$P_n=6\left(1+2+\cdots+n\right)=6\times\dfrac{n(n+1)}{2}=3n^2+3n$，

$T_n=1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}+2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{0}+\cdots+n\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}$，①

$\dfrac{1}{3}T_n=1\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{0}+2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1}+\cdots+n\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$，②

由①-②得$\dfrac{2}{3}T_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{0}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1}+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}-n\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$，

所以$T_n=\dfrac{3}{2}\left\{\dfrac{9}{2}\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}\right]-n\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=\dfrac{27}{4}-\dfrac{2n+3}{4\times 3^{n-2}}$，

故数列$\{na_n\}$的前n项和$S_n=T_n+P_n=\dfrac{27}{4}+3n^2+3n-\dfrac{2n+3}{4\times 3^{n-2}}$.

20.解：（1）连接CM，由题意得$CC_1\perp BD$，

又$BD\perp C_1M$，$CC_1\cap C_1M=C_1$，所以$BD\perp$平面C_1CM，

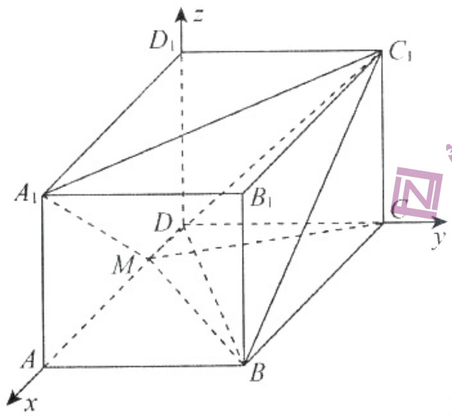
又$CM\subset$平面C_1CM，所以$BD\perp CM$，

在$\mathrm{Rt}\triangle BDC$和$\mathrm{Rt}\triangle CMD$中，因为$\angle BDC=\angle CMD$，所以$\mathrm{Rt}\triangle BDC\sim\mathrm{Rt}\triangle CMD$，

所以$\dfrac{MD}{DC}=\dfrac{DC}{BC}$，又$AM=3MD$，所以$BC=4MD$，

即$4MD^2=DC^2=AB^2=4$，所以$MD=1$，即$AD=BC=4MD=4$.

（2）直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，底面$ABCD$为矩形，所以以点D为坐标原点，DA，DC，DD_1所在直线分别为x，y，z轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



由（1）可得$D(0,0,0)$，$M(1,0,0)$，$A_1(4,0,2)$，$C_1(0,2,2)$，$B(4,2,0)$，

则$\overrightarrow{MC_1}=(-1,2,2)$，$\overrightarrow{MA_1}=(3,0,2)$，$\overrightarrow{MB}=(3,2,0)$，

设平面A_1MC_1的法向量为$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

由$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{MC_1}=-x_1+2y_1+2z_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{MA_1}=3x_1+2z_1=0\end{cases}$取$z_1=-3$，得$\vec{m}=(2,4,-3)$，

设平面BMC_1的法向量为$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{MC_1}=-x_2+2y_2+2z_2=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MB}=3x_2+2y_2=0\end{cases}$取$y_2=3$，可得$\vec{n}=(-2,3,-4)$，

$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{20}{\sqrt{29}\times\sqrt{29}}=\dfrac{20}{29}$，所以$\sin\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\sqrt{1-\left(\dfrac{20}{29}\right)^2}=\dfrac{21}{29}$，

故二面角 A_1-MC_1-B 的正弦值为 $\frac{21}{29}$.

21.（1）解：设动圆的圆心为 $M\left(x,y\right)$，半径为 r，

则 $|ME|=r+3\sqrt{2}$，$|MF|=r-\sqrt{2}$，所以 $|ME|-|MF|=4\sqrt{2}<|EF|$，

由双曲线定义可知，M 的轨迹是以 E，F 为焦点，实轴长为 $4\sqrt{2}$ 的双曲线的右支，

所以 $2a=4\sqrt{2}$，$2c=6$，即 $a=2\sqrt{2}$，$c=3$，所以 $b^2=c^2-a^2=1$，

所以 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{8}-y^2=1$，$x\geqslant 2\sqrt{2}$.

（2）证明：若①②⇒③：

由题可设直线 $l:x-8=m\left(y-1\right)$，$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，$Q\left(x_0,y_0\right)$，$y_0\neq 1$，

由直线 l 与 C 交于 A，B 两点，所以 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$，

联立 $\begin{cases} x-8=m\left(y-1\right) \\ \frac{x^2}{8}-y^2=1 \end{cases}$ 得 $\left(m^2-8\right)y^2-2m\left(m-8\right)y+\left(m-8\right)^2-8=0$，

所以 $y_1+y_2=\frac{2m\left(m-8\right)}{m^2-8}$，$y_1y_2=\frac{\left(m-8\right)^2-8}{m^2-8}$，

由 $|AP|\cdot|BQ|=|BP|\cdot|AQ|$，得 $\frac{|AP|}{|BP|}=\frac{|AQ|}{|BQ|}$，即 $\frac{y_1-1}{1-y_2}=\frac{y_0-y_1}{y_0-y_2}$，

由题知 $\frac{|AQ|}{|BQ|}\neq 1$，所以 $\frac{|AP|}{|BP|}\neq 1$，即 P 异于 AB 的中点，所以 $y_1+y_2\neq 2$，即 $m\neq 1$，

得 $y_0=\frac{2y_1y_2-\left(y_1+y_2\right)}{y_1+y_2-2}=-1+\frac{2y_1y_2-2}{y_1+y_2-2}=-1+\frac{\frac{2\left(m-8\right)^2-16}{m^2-8}-2}{\frac{2m\left(m-8\right)}{m^2-8}-2}=1-\frac{6}{m-1}$，

又 $x_0-8=m\left(y_0-1\right)$，所以 $m=\frac{x_0-8}{y_0-1}$，故 $y_0=1-\frac{6}{\frac{x_0-8}{y_0-1}-1}$，化简得 $x_0-y_0-1=0$，

所以点 Q 在直线 $x-y-1=0$ 上，又 Q 是 l 上的点，所以③成立.

若①③⇒②：

设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，$Q\left(x_0,y_0\right)$，$y_0\neq 1$，则 $x_0-y_0-1=0$.

由P，A，B，Q四点共线，设$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BQ}$，其中$\lambda>0$且$\lambda\neq1$，$\mu<0$，

则$x_1=\dfrac{\lambda x_0-8}{\lambda-1}$，$y_1=\dfrac{\lambda y_0-1}{\lambda-1}$，$x_2=\dfrac{\mu x_0-8}{\mu-1}$，$y_2=\dfrac{\mu y_0-1}{\mu-1}$，

又点A在C上，所以$\dfrac{x_1^2}{8}-y_1^2=1$，

所以$\dfrac{\left(\dfrac{\lambda x_0-8}{\lambda-1}\right)^2}{8}-\left(\dfrac{\lambda x_0-1}{\lambda-1}\right)^2=1$，整理得$\left(x_0^2-8y_0^2-8\right)\lambda^2-16\left(x_0-y_0-1\right)\lambda+48=0$，

又$x_0-y_0-1=0$，所以$\left(x_0^2-8y_0^2-8\right)\lambda^2+48=0$，

同理$\left(x_0^2-8y_0^2-8\right)\mu^2+48=0$，所以$\lambda^2=\mu^2=\dfrac{48}{8y_0^2-x_0^2+8}$，

又$\lambda>0$，$\mu<0$，所以$\lambda=-\mu$，故$\overrightarrow{AP}=-\mu\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BQ}$，

所以$\dfrac{\left|\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{AQ}\right|}=\dfrac{\left|\overrightarrow{BP}\right|}{\left|\overrightarrow{BQ}\right|}=\left|\mu\right|$，故$\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BQ}\right|=\left|\overrightarrow{BP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AQ}\right|$，即$\left|AP\right|\cdot\left|BQ\right|=\left|BP\right|\cdot\left|AQ\right|$成立，所以②成立.

若②③⇒①：

由题设$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，$P\left(x',y'\right)$，$Q\left(x_0,y_0\right)$，由$\left|AP\right|\cdot\left|BQ\right|=\left|BP\right|\cdot\left|AQ\right|$，得$\dfrac{\left|AP\right|}{\left|AQ\right|}=\dfrac{\left|BP\right|}{\left|BQ\right|}=\lambda$，

又点P为线段AB上一点，点Q为线段AB延长线上一点，

所以设$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{BP}=-\lambda\overrightarrow{BQ}$，其中$\lambda>0$且$\lambda\neq1$，

则$x_1=\dfrac{x'-\lambda x_0}{1-\lambda}$，$y_1=\dfrac{y'-\lambda y_0}{1-\lambda}$，$x_2=\dfrac{x'+\lambda x_0}{1+\lambda}$，$y_2=\dfrac{y'+\lambda y_0}{1+\lambda}$，

又点A在C上，所以$\dfrac{x_1^2}{8}-y_1^2=1$，所以$\dfrac{\left(\dfrac{x'-\lambda x_0}{1-\lambda}\right)^2}{8}-\left(\dfrac{y'-\lambda y_0}{1-\lambda}\right)^2=1$，

整理得$\left(x_0^2-8y_0^2-8\right)\lambda^2-\left(2x'x_0-16y'y_0-16\right)\lambda+x'^2-8y'^2-8=0$，

同理$\left(x_0^2-8y_0^2-8\right)\lambda^2+\left(2x'x_0-16y'y_0-16\right)\lambda+x'^2-8y'^2-8=0$，

所以$2x'x_0-16y'y_0-16=-\left(2x'x_0-16y'y_0-16\right)$，

故$x'x_0-8y'y_0-8=0$，将$x_0=y_0+1$代入得$\left(x'-8y'\right)y_0+x'-8=0$，

所以$\begin{cases}x'-8y'=0\\x'-8=0\end{cases}$故$\begin{cases}x'=8\\y'=1\end{cases}$即① $P(8,1)$成立.

22.（1）证明：即证$\mathrm{e}^x>1+\ln x$恒成立，

设$h(x)=\mathrm{e}^x-1-\ln x$，$h'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{x}$，显然$h'(x)$在区间$(0,+\infty)$内单调递增，

又$h'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}-2<0$，$h'(1)=\mathrm{e}-1>0$，

所以存在唯一$x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得$h'(x_0)=0$，即$\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，$x_0=-\ln x_0$.

当$x\in(0,x_0)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减；当$x\in(x_0,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增，

所以$h(x)\geqslant h(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-1-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}+x_0-1$，

又$x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，所以$\dfrac{1}{x_0}+x_0>2$，故$h(x)\geqslant h(x_0)=\dfrac{1}{x_0}+x_0-1>1>0$，

所以$\mathrm{e}^x>1+\ln x$，即$f(x)>g(x)$.

（2）解：由$|f(x)-a|>ag(x)$，得$|x\mathrm{e}^x-a|>a(x+x\ln x)$，$x>0$，

当$a\leqslant 0$时，$x\mathrm{e}^x-a>0$，所以$x\mathrm{e}^x-a>a(x+x\ln x)$，即$x\mathrm{e}^x>a(x+x\ln x+1)$，

设$t(x)=x+x\ln x+1$，则$t'(x)=2+\ln x$，且$t'(\mathrm{e}^{-2})=0$，

当$x\in(0,\mathrm{e}^{-2})$时，$t'(x)<0$，$t(x)$单调递减；

当$x\in(\mathrm{e}^{-2},+\infty)$时，$t'(x)>0$，$t(x)$单调递增，

所以$t(x)\geqslant t(\mathrm{e}^{-2})=1-\mathrm{e}^{-2}>0$，所以$a(x+x\ln x+1)\leqslant 0$，

所以$x\mathrm{e}^x>a(x+x\ln x+1)$，即$|f(x)-a|>a(x+x\ln x)$成立；

当$a>0$时，令$u(x)=x\mathrm{e}^x-a$，$x>0$，则$u'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x>0$，

所以$u(x)$在区间$(0,+\infty)$内单调递增，

又$u(0)=-a<0$，$u(a)=a(\mathrm{e}^a-1)>0$，

所以存在唯一$x_0'\in(0,a)$，使得$u(x_0')=0$，即$x_0'\mathrm{e}^{x_0'}-a=0$，

当 $x\in(0,x_0')$ 时，$u(x)<0$，由 $|xe^x-a|>a(x+x\ln x)$，

得 $-xe^x+a>a(x+x\ln x)$，即 $-e^x+\frac{a}{x}-a\ln x-a>0$，

设 $p(x)=-e^x+\frac{a}{x}-a\ln x-a$，则 $p'(x)=-e^x-\frac{a}{x^2}-\frac{a}{x}<0$，

所以 $p(x)$ 在区间 $(0,x_0')$ 内单调递减，

所以 $p(x)>p(x_0')=-e^{x_0'}+\frac{a}{x_0'}-a\ln x_0'-a=-a\ln x_0'-a>0$，解得 $x_0'<\frac{1}{e}$.

当 $x\in(x_0',+\infty)$ 时，$u(x)>0$，即 $xe^x-a>0$，

由 $|xe^x-a|>a(x+x\ln x)$，得 $xe^x-a>a(x+x\ln x)$，

即 $e^x-\frac{a}{x}-a\ln x-a>0$，设 $q(x)=e^x-\frac{a}{x}-a\ln x-a$，则 $q'(x)=e^x+\frac{a}{x^2}-\frac{a}{x}$，

由 $xe^x-a>0$ 得 $e^x-\frac{a}{x}>0$，所以 $q'(x)=e^x+\frac{a}{x^2}-\frac{a}{x}>0$，所以 $q(x)$ 单调递增，

所以 $q(x)>q(x_0')=e^{x_0'}-\frac{a}{x_0'}-a\ln x_0'-a=-a\ln x_0'-a>0$，解得 $x_0'<\frac{1}{e}$，

由 $a=x_0'e^{x_0'}$，得 $a=x_0'e^{x_0'}<\frac{1}{e}e^{\frac{1}{e}}=e^{\frac{1}{e}-1}$，

综上，实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,e^{\frac{1}{e}-1}\right)$.